

Analyse und Interpretation dendrochronologischer  
Daten zur Klimageschichte

Archäologische Analytik

Jürgen Grieser

05.12.1997



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Dendrochronologische Daten</b>	<b>7</b>
2.1	Baumringparameter . . . . .	7
2.2	Was bestimmt den zeitlichen Verlauf von Baumringparametern? . . . . .	8
2.3	Welche Daten liegen vor? . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Klimatische Einflußgrößen</b>	<b>11</b>
3.1	Welche Daten liegen vor? . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Rekonstruktionsstrategien</b>	<b>13</b>
4.1	Vorgehensweise . . . . .	13
4.2	Abschätzung des statistischen Fehlers . . . . .	16
4.3	Statistische Methoden zum Finden von Zusammenhängen . . . . .	18
4.3.1	Suche nach globalen Zusammenhängen . . . . .	18
4.3.2	Suche nach speziellen Zusammenhängen . . . . .	26
4.3.3	Hauptkomponenten der Variation der klimatischen Größen . . . . .	39
4.3.4	Sukzessive und multiple Analysen . . . . .	44
	<b>Literatur</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Was bedeutet stochastische Unabhängigkeit?</b>	<b>55</b>
<b>B</b>	<b>Spezielle statistische Methoden</b>	<b>57</b>
B.1	Sensitivität . . . . .	57
B.2	Gleichläufigkeit . . . . .	59
B.3	Intervalltrend . . . . .	59



# Kapitel 1

## Einführung

Im Rahmen des Graduiertenkollegs “Archäologische Analytik“ sollen unter anderem klimatische Faktoren bei der Entstehung agrarischer Wirtschafts- und Herrschaftsformen des Frühmittelalters untersucht werden. Dazu sollen aus zum Teil schon vorhandenen Jahringchronologien Klimarekonstruktionen insbesondere für das Gebiet der Lausitz und das erste Jahrtausend n. Chr. erstellt werden. Vorliegende Arbeiten zur Klimarekonstruktion aus Baumringparameterzeitreihen beziehen sich im allgemeinen auf Klimazonen, in denen entweder der Niederschlag oder die Temperatur der wachstumslimitierende Faktor ist. In solchen Fällen wurden Klimarekonstruktionen in Form von z.B. mittleren Sommertemperaturen erfolgreich durchgeführt. Im Untersuchungsgebiet des Graduiertenkollegs kann das Baumwachstum nicht eindeutig auf eine gemittelte klimatische Einflußgröße zurückgeführt werden. Deshalb stellt sich zunächst die Frage, welche klimatischen Parameter in welcher zeitlichen Auflösung und zeitlichen Struktur in den Baumringparametern wiedergefunden werden können. Es ist deshalb die Aufgabe dieser Arbeit, Strategien zu finden, die es erlauben, die Art der Zusammenhänge zwischen klimatischen Einflußfaktoren und dem Baumwachstum sowie die Güte solcher Zusammenhänge zu entdecken. Erst wenn die Struktur des Zusammenhangs zuverlässig erkannt ist, können Rekonstruktionen gewagt und deren Qualität abgeschätzt werden. Da die Zeit zur Durchführung der Analysen und dem Erstellen dieses Berichts sehr beschränkt war, wird in dieser Arbeit weitgehend darauf verzichtet, die klassischen Herangehensweisen an das Problem zu diskutieren. So wird in den Kapiteln 2 und 3 nur kurz auf die notwendigen Vorinformationen und die den Analysen zugrunde liegenden Daten eingegangen. Näheres findet man in der Literatur, z.B. [15] [7] [10] [6]. Das Kapitel 4 stellt den Hauptteil der Arbeit dar. Es wird kurz die Strategie der Klimarekonstruktion aus dendrochronologischen Daten diskutiert. Anschließend wird eine einfache Abschätzung des statistischen Rekonstruktionsfehlers gegeben. Die folgenden Abschnitte sind dann den statistischen Methoden zum Finden von Zusammenhängen gewidmet. Diese werden jeweils ausführlich eingeführt und dann an der einzigen zur Verfügung stehenden Baumparameterreihe (Jahringbreiten von Kiefern in Brandenburg) erprobt. Die dazu durchgeführten Rechnungen zeigen zwar interessante Effekte, führen jedoch nicht zu einem klaren und eindeutig invertierbaren Zusammenhang, der eine Rekonstruktion erlau-

ben würde. Im Rahmen der zur Verfügung stehenden Zeit konnten aber mit jeder Strategie nur wenige Experimente durchgeführt werden, so daß zu erwarten ist, daß eine konsequente Umsetzung der gewonnenen Erkenntnisse zu brauchbaren und in ihrer Qualität charakterisierbaren Rekonstruktionen führt.

# Kapitel 2

## Dendrochronologische Daten

### 2.1 Baumringparameter

Der jährliche Holzzuwachs von Bäumen drückt sich in Form von Jahrringen aus. Diese bestehen aus zwei unterschiedlich dichten Holzarten: dem schnellwachsenden Frühholz und dem langsamwachsenden Spätholz. Das Frühholzwachstum findet im Frühsommer statt und basiert auf Zellen, die nur etwa 5 bis 20 Tage Lebenszeit haben. In dieser Phase findet demnach ein schnelles Wachstum von wenig dichtem Holz statt. Der Frühholzanteil ist deshalb breit und wenig dicht. Dies unterscheidet ihn stark vom langsamwachsenden Spätholz, das im wesentlichen im Spätsommer entsteht. Die Zellen haben zu dieser Zeit eine Lebensdauer von 2 bis 3 Monaten, so daß Holz mit einer hohen Dichte, aber geringer Breite entsteht. Anhand der Folge von dichtem und weniger dichtem Holz kann somit eine Jahrringchronologie erstellt werden, die auf bis zu vier Parametern beruhen kann:

1. Frühholzdichte (minimale Dichte,  $F_d$ )
2. Frühholzbreite ( $F_b$ )
3. Spätholzdichte (maximale Dichte,  $S_d$ )
4. Spätholzbreite ( $S_b$ )

Aus diesen Größen können zahlreiche abgeleitete Parameter erstellt werden wie z.B. der Baumwuchswert nach Hollstein (s. z.B. [1]). Meßtechnisch ist der am einfachsten zugängliche Parameter die Jahrringbreite  $J_b = F_b + S_b$ . Dieser Parameter wird maßgeblich von der Frühholzbreite bestimmt, und müßte demnach hauptsächlich Informationen über das Baumwachstum im Frühsommer enthalten.

Es stellt sich nun zunächst die Frage, ob die verschiedenen Baumringparameter tatsächlich sehr unterschiedliche oder nur wenig unterschiedliche Information beinhalten. Um dies zu

untersuchen wurden in einer früheren Studie [11] alle sechs univariaten Korrelationskoeffizienten für die vier Baumringparameter von 20 skandinavischen Stationen berechnet. Es zeigte sich, daß nur bei acht Stationen und nur bei der Korrelation zwischen Spätholzdicke und Spätholzbreite ein linearer Zusammenhang gefunden werden konnte, der mehr als 50 % der Varianz beschreibt. Dies zeigt, daß i.A. alle vier Koeffizienten unterschiedliche Informationen enthalten und nach Möglichkeit in die Analyse einfließen sollten. Diesem Ideal steht entgegen, daß die Dichten nur für unverwittertes Holz (und nur mit vergleichsweise großem Aufwand) meßbar sind, d.h. nicht für Rekonstruktionen in das erste Jahrtausend n. Chr. verwendet werden können.

## 2.2 Was bestimmt den zeitlichen Verlauf von Baumringparametern?

Der zeitliche Verlauf von Baumringparametern wird i.A. von zahlreichen klimatischen und nichtklimatischen Faktoren bestimmt. Rekonstruktionen sind dann am einfachsten, wenn nur ein Einflußfaktor (z.B. die mittlere Sommertemperatur) wesentlich ist. Andererseits kann in einem solchen Fall auch nur dieser eine Einflußfaktor rekonstruiert werden. So hat sich z.B. gezeigt, daß in hohen Breiten (humides Klima) hauptsächlich die Temperatur wachstumslimitierend ist und damit rekonstruiert werden kann, während in niederen (außertropischen) Breiten (arides Klima) hauptsächlich der Niederschlag wachstumslimitierend ist [7]. In den gemäßigten Breiten kann i.A. keiner dieser beiden klimatologischen Einflußparameter alleine das Baumwachstum bestimmen. Es kommt zu (möglicherweise komplizierten) Wechselbeziehungen dieser Einflüsse, die es zu erkennen und zu modellieren gilt. Falls dies gelingt, steht einem allerdings die Möglichkeit offen, mehrere Einflußfaktoren zu rekonstruieren. Dabei besteht immer das Problem, daß das Baumwachstum eines Jahres von sehr vielen Einflußfaktoren während, aber auch außerhalb der Wachstumsperiode abhängt. So bestimmen nicht nur der Niederschlag während der Wachstumsperiode (über die dadurch beeinflusste Bodenfeuchte) und die Temperatur (über die Korrelation mit dem Angebot an Licht) das Wachstum, sondern auch die im Vorwinter aufgetretenen Frostschäden oder Schneebruch das Wachstum. Man kann davon ausgehen, daß die Baumringparameter gewichtete Integrale über den Verlauf der klimatischen Parameter vor und während der Wachstumsperiode darstellen. Bäume reagieren zum einen recht schnell (d.h. sie können z.B. nach einer wochenlangen ungünstigen Phase innerhalb von Tagen das verhinderte Baumwachstum nachholen) zum anderen reagieren sie mit Gedächtnis, d.h., daß nicht nur die momentane Situation die momentane Wachstumsgeschwindigkeit beeinflusst, sondern auch die unmittelbare Vergangenheit [16]. Zusätzlich besteht scheinbar auch ein Zusammenhang zum Wachstum des Vorjahres [7]. Aus diesen Erkenntnissen folgt, daß die Baumringparameter nicht zwangsläufig mit den mittleren klimatischen Parametern während der Wachstumsphase korreliert sind, sondern daß der Zusammenhang vielmehr vom zeitlichen Verlauf der klimatischen Parameter während und vor der Wachstumsphase abhängt. Dabei ist zu beachten, daß jede Baumart unterschiedlich sensibel auf verschiedene



zeitliche Entwicklungen der klimatischen Parameter reagiert. So kann das Wachstum von Bäumen, die sehr früh im Jahr ausschlagen, stark von Nachtfrösten im späten Frühjahr beeinträchtigt werden, während Bäume, die erst später ausschlagen, davon unbeeinflusst sind. Es ist folglich anzustreben, einerseits möglichst verschiedene Baumparameterreihen von möglichst vielen Baumarten zur Verfügung zu haben, andererseits den Verlauf der klimatischen Parameter möglichst detailliert zu kennen.

Zusätzlich zu diesen klimatischen Einflüssen müssen auch die nichtklimatischen Einflüsse in Betracht gezogen werden. Als nichtklimatische Einflußfaktoren kommen vor allem individuelle Standortprobleme (z.B. Konkurrenz) und (damit eng gekoppelt) Probleme des Nährstoffangebots in Betracht. Diese können wiederum bei unterschiedlichen klimatischen Situationen von unterschiedlicher Bedeutung sein. Auch der Schädlingsbefall als nichtklimatische Ursache kann maßgeblich durch die klimatische Situation (auch außerhalb der Wachstumsperiode) bestimmt sein. Auf alle diese Einflußgrößen reagieren nicht nur verschiedene Baumarten unterschiedlich, so daß es sinnvoll erscheint, möglichst viele Baumarten in die Auswertung mit einzubeziehen, sondern auch einzelne Bäume einer Art, weshalb es notwendig ist, für jedes zu rekonstruierende Jahr möglichst viele Einzelbäume einer Art in die Untersuchung mit einzubeziehen. Zuletzt sei noch der anthropogene Streß genannt, der (wie möglicherweise auch der  $CO_2$ -Düngeeffekt) in den letzten Dekaden immer mehr an Bedeutung gewonnen zu haben scheint.

## 2.3 Welche Daten liegen vor?

Vom Deutschen Archäologischen Institut (DAI) in Berlin liegt z.Zt. eine Zeitreihe von Jahrringbreiten von Kiefern aus der Region Brandenburg von 1859 bis 1994 vor [9](s. Abb. 2.1). Dies stellt eine recht geringe Information dar, da

1. Jahrringbreiten (im Vergleich zu Spätholzdichten [5]) nur wenig sensibel auf Temperaturschwankungen reagieren und
2. nur die Information einer Baumart genutzt werden kann.

Betrachtet man zusätzlich die Anzahl der zur Erstellung der Reihe verwendeten Bäume (Abb. 2.1), so erkennt man, daß diese von etwa 1930 bis 1990 konstant bei 98 Werten liegt. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß es sich in jedem Jahr um die gleichen 98 Bäume handelt und somit zumindest für diese Zeit ein Alterstrend in der Zeitreihe vorhanden ist. Dies ist bei der Suche nach Zusammenhängen zwischen den klimatischen Variablen und der Baumringreihe zu berücksichtigen.

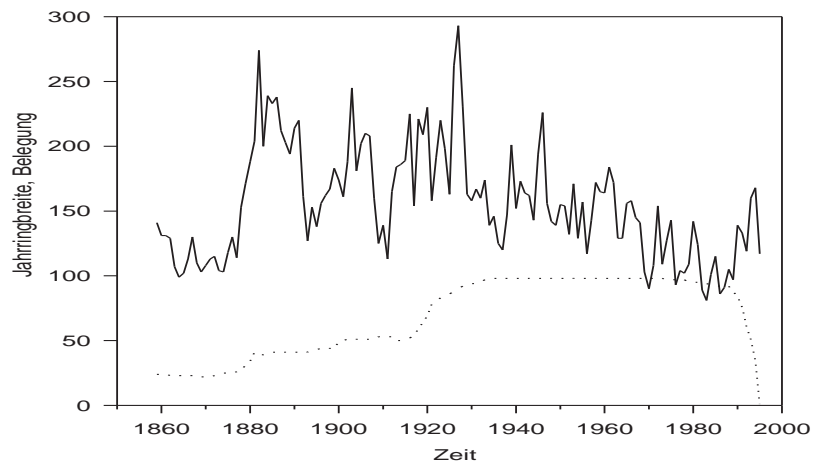


Abbildung 2.1: Zeitlicher Verlauf der Jahringbreiten von Kiefern in Brandenburg von 1859 bis 1994 (durchgezogene Linie) und Anzahl der dazu verwendeten Bäume (gepunktete Linie)

# Kapitel 3

## Klimatische Einflußgrößen

Wie schon in Kap. 2 diskutiert wurde, hängt der Baumwuchs von mehreren klimatischen Faktoren während, aber auch außerhalb der Wachstumsperiode ab. Weiterhin können auch die nichtklimatischen Einflußgrößen (z.B. Schädlingsbefall) von klimatischen Größen beeinflusst sein und somit einen indirekten klimatischen Einfluß darstellen. Da Spätholzdichten das Mittel über eine lange Lebenszeit der Zellen repräsentieren, können Spätholzdichten als Maß für mittlere Sommersituationen verwendet werden. Da hier aber nur Jahringbreiten zur Verfügung stehen, erscheint es zunächst nicht sinnvoll Daten von Sommermitteln zu verwenden. Stattdessen erscheint eine zunächst möglichst hohe zeitlichen Auflösung angemessen. Für die ersten Voruntersuchungen erscheint die Verwendung von Monatsdaten daher ein guter Kompromiß zu sein.

Da das Untersuchungsgebiet (Brandenburg) weder zu den rein humiden Klimaten gezählt werden kann, bei denen der Baumwuchs wesentlich (linear) von der Temperatur gesteuert wird, noch zu den subtropisch ariden Klimaten, bei denen der Baumwuchs hauptsächlich (linear) vom Niederschlag gesteuert wird, scheint es hier notwendig beide Einflußgrößen mit in Betracht zu ziehen. Dies birgt aber auch die Möglichkeit, beide Einflußgrößen rekonstruieren zu können.

### 3.1 Welche Daten liegen vor?

Sowohl für die Temperatur als auch für den Niederschlag liegen Daten von 1891 bis 1991 in monatlicher Auflösung für die Station Potsdam vor. Dies entspricht 1212 Monatsmitteltemperaturen und gleichvielen monatlichen Niederschlagssummen. Für diesen Zeitraum gilt es nun nach Zusammenhängen zwischen den 24 potentiellen Einflußgrößen (12 Monatstemperaturen und 12 monatliche Niederschlagssummen) und der Jahringbreite zu suchen. Dieser Aufgabe ist das folgende Kapitel gewidmet, in dem mehrere Strategien anhand der einen vorhandenen Zielzeitreihe und der 24 potentiellen klimatischen Einflußzeitreihen erprobt werden.

Aufgrund der geringen Datenbasis werden diese Ergebnisse nur bedingt aussagekräftig sein. Sie sind als Voruntersuchungen aufzufassen, die, sobald mehr Daten zur Verfügung stehen, erweitert werden müssen.

# Kapitel 4

## Rekonstruktionsstrategien

### 4.1 Vorgehensweise

Die Strategie zur Rekonstruktion von Klimaschwankungen aus Baumringparameterzeitreihen besteht im wesentlichen aus drei Schritten:

1. Anpassung eines statistischen Modells
2. Verifikation des Modells
3. Rekonstruktion des Klimas

Jeder dieser Arbeitsschritte soll im folgenden eingehend vorgestellt werden:

zu 1.) Anpassung eines statistischen Modells

Da in der Dendroklimatologie nicht genug detaillierte Kenntnisse der Ursache-Wirkungsbeziehungen zwischen Klima und Baumwachstum vorliegen, steht keine eindeutige und allgemeingültige Modelltheorie zur Verfügung. Daher muß es der erste Schritt sein, eine als sinnvoll erscheinende Modellstruktur anzunehmen. Dies geschieht nicht ohne eine gewisse Willkür. Es ist deshalb unumgänglich verschiedene Modellansätze zu verwenden und deren offene Parameter optimal anzupassen. Dazu werden in den Abschnitten 4.3.1 bis 4.3.4 vier verschiedene Strategien vorgestellt und an den vorhandenen Daten erprobt. Jede dieser Strategien bietet Vor- und Nachteile, so daß man erst nachträglich durch Vergleichen der Ergebnisse bewerten kann, welche Strategie den anderen überlegen ist. Diese Bewertung wird wahrscheinlich auch von den speziell vorliegenden Daten abhängen, und ist somit nicht verallgemeinerbar. Die vier Strategien haben die folgenden Schwerpunkte:

- Suche nach globalen Zusammenhängen (s. Abschnitt 4.3.1)  
Bei dieser Strategie wird nach Zusammenhängen zwischen den einzelnen Zeitreihen der klimatischen Parameter und der Zeitreihe der Jahrringbreiten gesucht.

Diese Strategie ist ohne Aufwand auch auf mehrere Baumringparameter oder mehrere zu untersuchende Baumarten zu erweitern. Gesucht wird nach Zusammenhängen, die für alle Werte der einzelnen Zeitreihen gültig sind. Daher der Name globale Zusammenhänge. Aus dieser Strategie folgt die Erkenntnis darüber, ob zwischen einzelnen Zeitreihen funktionale und signifikante Abhängigkeiten gefunden werden können. Dabei kann zwischen linearen, monotonen und nicht-monotonen Zusammenhängen unterschieden werden. Am Ende dieser Untersuchungen weiß man, welche Einflußgrößen wie und wie stark in der Zielgröße wiederzufinden sind. Daraus könnte man im Prinzip schon ein Modell konstruieren.

- Suche nach speziellen Zusammenhängen (s. Abschnitt 4.3.2)  
Denkt man sich eine Zeitreihe als Überlagerung von speziellen Komponenten wie Trend, Saisonfigur, Schwingungen, Extremwerte usw. so kann man nach Zusammenhängen zwischen den speziellen Komponenten der verschiedenen Zeitreihen suchen. Dies ist sinnvoll, wenn z.B. zu erwarten ist, daß die Jahr-zu-Jahr-Variabilität der klimatischen Parameter einen anderen Einfluß auf die Jahrringbreiten ausübt als der Trend. Eine solche Aufspaltung der Zeitreihen erlaubt es, z.B. den Einfluß von extremen klimatischen Situationen gesondert zu behandeln. Zusätzlich liefert diese Strategie die Güte von Zusammenhängen auf verschiedenen zeitlichen Skalen.
- Hauptkomponenten der klimatischen Parameter (s. Abschnitt 4.3.3)  
Die Zerlegung, wie sie in der zweiten Strategie vorgeschlagen ist, richtet sich nach verschiedenen Phänomenen (z.B. Trend, Extremwerte). Eine alternative Zerlegung dazu ist die Zerlegung in Hauptkomponenten der Variation der klimatischen Parameter. Damit läßt sich erkennen, welcher Anteil der Variation in den Jahrringbreiten gefunden wird. Dies klärt die Frage, welcher Anteil der Variation der klimatischen Parameter überhaupt rekonstruierbar ist. Die Antwort auf diese Frage hängt dann auch davon ab, wieviel Fehlervarianz man toleriert (s. Abschnitt 4.2).
- Sukzessive und multiple Analysen (s. Abschnitt 4.3.4)  
Bei den ersten drei Strategien wurden immer nur Zeitreihenpaare untersucht. Man kann diese Strategie aber verallgemeinern, indem man sukzessive zunächst den besten Zusammenhang zwischen der (dazu am geeignetsten) Einflußgröße und der Zielgröße bestimmt, diesen eliminiert und wieder nach dem besten Zusammenhang des Rests der Zielgröße mit den in Betracht kommenden Einflußgrößen sucht. Dies kann man solange fortsetzen, bis man keinen signifikanten Zusammenhang mehr findet. Bei dieser Strategie wird also der Reihe nach immer der beste Zusammenhang zwischen einzelnen Einflußgrößen und der Zielgröße selektiert. Bei den multiplen Analysen läßt man zusätzlich zu, daß die verschiedenen Einflußgrößen gemeinsam (kombiniert) auf die Zielgröße wirken, was die Anzahl der Möglichkeiten einer optimalen Anpassung weiter erhöht. Es lassen sich damit optimale signifikante (auch nichtlineare) Zusammenhänge

zwischen allen möglichen Einflußgrößen (inkl. Wechselwirkungen) einerseits und der Zielgröße andererseits finden. Eine Erweiterung dessen wären multivariate Analysen, bei denen mehr als eine Zielgröße simultan verarbeitet werden. Da für die Analysen dieser Arbeit aber nur eine Zielgröße zur Verfügung stand, wurde dieser Weg (noch) nicht beschritten.

zu 2.) Verifikation des Modells

Im zweiten Schritt der Untersuchungen muß sich die als sinnvoll angenommene und an die Daten optimal angepaßte Modellstruktur als sinnvoll erweisen. Dazu sind mehrere Kriterien zu berücksichtigen. Zunächst sollte diejenige Modellstruktur bevorzugt werden, die den größten Anteil der Varianz des Baumwachstums aufgrund der klimatischen Einflußgrößen erklärt. Dieses Kriterium ist alleine nicht ausreichend, da es recht anfällig gegenüber einer möglichen Überanpassung ist. Deshalb kann man in einer erweiterten Herangehensweise das Modell an einen Teil der vorliegenden Daten optimal anpassen und den anderen Teil als Verifikationsbereich nutzen. Dies zeigt, ob das Modell auch für die Daten, an die es nicht angepaßt wurde, einen ebenso hohen Anteil der Varianz erklären kann. In einem weiteren Schritt kann man dann den Anpassungs- und den Verifizierungszeitraum austauschen. Wenn der gefundene optimale Zusammenhang allgemeingültig ist, dann dürfen sich die Koeffizienten bei der Anpassung an ein anderes Datenkollektiv der gleichen Zeitreihe nicht signifikant ändern. Sind diese Bedingungen erfüllt, so stellt sich die Frage, ob man alle wesentlichen Strukturen in der Zielzeitreihe (Jahringbreiten) durch das Modell und die betrachteten Einflußgrößen erklären konnte. Um diese Frage bejahen zu können, muß man zeigen, daß das Residuum (der nicht durch die Einflußgrößen erklärte Anteil) keine Strukturen mehr aufweist. Das bedeutet, daß man zeigen muß, daß dieses Residuum als Realisierung eines stationären Prozesses aufgefaßt werden kann. Das heißt insbesondere, daß Mittelwert, Varianz und Autokovarianzfunktion des Residuums auf Stationarität getestet werden müssen. Falls das Residuum zusätzlich noch Gauß-verteilt ist, erlaubt dies eine Abschätzung des statistischen Fehlers (s. Abschnitt 4.2).

zu 3.) Rekonstruktion

Um einen gefundenen Zusammenhang zwischen den klimatischen Einflußgrößen einerseits und dem Baumwachstum andererseits für eine Rekonstruktion der klimatischen Größen nutzen zu können, muß dieser invertiert werden. Dies ist nur mit bijektiven Abbildungen möglich, d.h. eindeutig umkehrbaren Funktionen. Für eindimensionale Abhängigkeiten ist dies z.B. durch monotone Funktionen erfüllt.

## 4.2 Abschätzung des statistischen Fehlers

Da zur Rekonstruktion optimal angepaßte statistische Modelle verwendet werden, ist es möglich, aus der Kenntnis der Residuen (des nicht durch die Anpassung erklärten Anteils) den statistischen Fehler der Rekonstruktion abzuschätzen. Als statistisches Modell wird hier ein Modell verstanden, das eine beste Anpassung zwischen  $i$  Einflußzeitreihen  $X_{i,t}$  und einer Zielzeitreihe  $Y_t$  macht. Dieses Modell kann dann dazu verwendet werden, um die Zielzeitreihe aufgrund vorhergehender Werte der Einflußzeitreihe zu rekonstruieren. Je nachdem wie gut die Anpassung ist, wird man einen mehr oder weniger hohen statistischen Fehler machen. Diesen gilt es abzuschätzen. Der statistische Fehler muß dabei klar vom systematischen Fehler der Modellanpaßung unterschieden werden. Letzterer kann als vernachlässigbar angesehen werden, wenn die Differenz aus aufgrund der Anpassung erklärtem Anteil an der Zielzeitreihe  $\hat{Y}_t(X_{i,t})$  und der Zielzeitreihe selbst als Rauschen aufgefaßt werden kann. Dann trägt nur noch dieses statistische Rauschen zum Fehler der Rekonstruktion bei.

Hier soll nun angegeben werden, wie unter dieser Voraussetzung der statistische Fehler der Rekonstruktion von der erklärten Varianz der Anpassung und der Standardabweichung der Rekonstruktion abhängt. Dazu wird zunächst die Varianz der Zielzeitreihe  $\sigma_y^2$  in zwei Anteile aufgespalten:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{\hat{y}}^2 + \sigma_{y-\hat{y}}^2 \quad (4.1)$$

wobei  $\sigma_{\hat{y}}^2$  der Anteil der Varianz ist, der durch die Einflußzeitreihen erklärt wird, während  $\sigma_{y-\hat{y}}^2$  der Anteil der Varianz von  $Y_t$  ist, der nicht durch die  $X_{i,t}$  erklärt ist. Teilt man Gleichung (4.1) durch  $\sigma_{\hat{y}}^2$  so erhält man folgenden Ausdruck

$$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_{\hat{y}}^2} = 1 + \frac{\sigma_{y-\hat{y}}^2}{\sigma_{\hat{y}}^2}. \quad (4.2)$$

Nun ist der Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung (4.2) gleich dem Reziproken des Bestimmtheitsmaßes  $r^2$  (oft auch erklärte Varianz genannt, obwohl es keine Varianz ist, sondern ein Varianzanteil). Setzt man  $r^2$  in Gleichung (4.2) ein, stellt nach dem rechten Term auf der rechten Seite um und zieht die Wurzel, so erhält man

$$\frac{\sigma_{y-\hat{y}}}{\sigma_{\hat{y}}} = \sqrt{\frac{1}{r^2} - 1}. \quad (4.3)$$

Gleichung (4.3) gibt demnach die Abhängigkeit des Verhältnisses der Standardabweichung des nicht erklärten Anteils zu der des erklärten Anteils als Funktion des Bestimmtheitsmaßes an. Damit ist man in der Lage aus der Standardabweichung der Vorhersage oder Rekonstruktion auf die Standardabweichung des zugehörigen statistischen Fehlers zu schließen. Wie sensibel diese Abhängigkeit insbesondere für nicht sehr große erklärte Varianzen ist, zeigt Abbildung 4.1. So ist z.B. bei einer erklärten Varianz von 80 % die Standardabweichung des statistischen Fehlers noch halb so groß wie die der Rekonstruktion. Aus der Kenntnis von  $\sigma_{y-\hat{y}}^2$  können dann Vertrauensgrenzen für die Rekonstruktionswerte angegeben werden. Unter der Bedingung, daß der statistische Fehler normalverteilt ist, folgt:



90% der wahren Werte liegen weniger als  $1.64 \sigma_{y-\hat{y}}$  vom Modellwert entfernt,  
95% der wahren Werte liegen weniger als  $1.96 \sigma_{y-\hat{y}}$  vom Modellwert entfernt und  
99% der wahren Werte liegen weniger als  $2.58 \sigma_{y-\hat{y}}$  vom Modellwert entfernt.

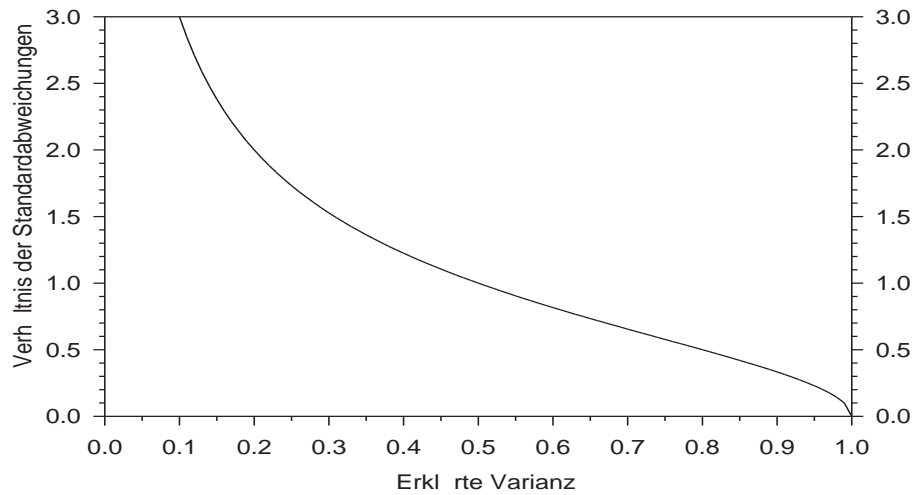


Abbildung 4.1: Verhältnis der Standardabweichung des statistischen Fehlers zur Standardabweichung der Rekonstruktion in Abhängigkeit von der erklärten Varianz der Anpassung (s. Glg. (4.3)).

## 4.3 Statistische Methoden zum Finden von Zusammenhängen

### 4.3.1 Suche nach globalen Zusammenhängen

Im folgenden werden Verfahren beschrieben, mit denen man Zusammenhänge zwischen Zeitreihen finden kann, die sich in der Gesamtstruktur der Zeitreihen widerspiegeln. Die verschiedenen Verfahren beantworten verschiedene Fragen unter der Angabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit, d.h. alle Ergebnisse sind von ihrer Natur her bedingte Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Zunächst stellt sich die Frage, ob man zwischen den Beobachtungsdaten von Monatswerten der Temperatur und des Niederschlags in Potsdam einerseits und den Baumringbreiten andererseits Zusammenhänge begründet vermuten kann. Dies geht ausschließlich durch die Betrachtung von Ähnlichkeiten zwischen den Stichproben, die signifikant gesehen werden müssen. Die Frage, die zunächst beantwortet werden sollte, ist demnach die, ob die Datenreihen untereinander stochastisch abhängig sind. Im Anhang A wird das Konzept der stochastischen Abhängigkeit beschrieben. Im folgenden Abschnitt wird ein Test auf stochastische Abhängigkeit vorgestellt, der darauf beruht, daß man die Hypothese aufstellt, daß zwei zu untersuchende Variablen unabhängig sind, und fragt, wie unwahrscheinlich die gefundenen Beobachtungsreihen unter dieser Annahme sind. Eins minus dieser Unwahrscheinlichkeit ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man sich irrt, wenn man sagt, daß die beiden Variablen voneinander abhängen. Stellt man nun aufgrund dieses Tests fest, daß die beiden Variablen voneinander wahrscheinlich nicht stochastisch unabhängig sind, so weiß man noch nicht wie stark diese Abhängigkeit ist. Ein allgemeines Maß für die Stärke des (stochastischen) Zusammenhangs wird im darauffolgenden Abschnitt eingeführt. Dabei handelt es sich um den Transinformationskoeffizienten. Zusätzlich wird auch hier die Hypothese getestet, daß der Wert dieses Koeffizienten nur durch Zufall entstanden ist, unter der Annahme, daß kein stochastischer Zusammenhang vorliegt.

Anschließend wird der Frage nachgegangen, von welcher Art ein gefundener Zusammenhang ist. Dazu werden dem Transinformationskoeffizienten drei eingeschränkte Maße gegenübergestellt. Dies ist der Pearson-Korrelationskoeffizient, der die Stärke des linearen Zusammenhangs abschätzt, sowie der Spearman- und der Kendall-Koeffizient, welche die Stärke des monoton erklärbaren Zusammenhangs messen. Unterscheiden sich nun alle diese Maße nicht signifikant, so deutet dies auf einen linearen stochastischen Zusammenhang hin, ist der Pearson-Koeffizient signifikant kleiner als die anderen, und sind diese nicht signifikant unterscheidbar, so liegt ein monotoner stochastischer Zusammenhang vor, falls aber alle Koeffizienten signifikant kleiner sind als der Transinformationskoeffizient, so ist der Zusammenhang weder linear noch monoton. Die Ergebnisse dieses Teils der Untersuchungen werden im letzten Abschnitt dieses Kapitels dargestellt und diskutiert.

**Wie erkennt man stochastische Abhängigkeit?**

Um stochastische Abhängigkeit zu erkennen, muß man zunächst die Hypothese stochastischer Unabhängigkeit aufstellen und dann testen, ob man diese Hypothese auf hohem Niveau ablehnen kann [2]. Dazu definiert man zuerst die Nullhypothese, nämlich daß die zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  stochastisch unabhängig sind. Wenn dem so ist, muß für die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $p(x|y)$  und  $p(y|x)$  gelten:

$$\begin{aligned} p(x|y) &= p(x) \\ p(y|x) &= p(y) \end{aligned}$$

also auch

$$p(x, y) = p(x) p(y). \quad (4.4)$$

Diese Wahrscheinlichkeitsdichten sind nicht bekannt, können aber geschätzt werden. Dies geschieht durch Klasseneinteilung und die Kontingenztafel. Teilen wir also zunächst allgemein die Variable  $X$  in  $M$  Klassen und die Variable  $Y$  in  $R$  Klassen ein. Diese Einteilung sollte so gewählt sein, daß in jeder Klasse mindestens 5 Werte liegen [14]. Die Klassen müssen aber auf jeden Fall disjunkt sein. Die Wahrscheinlichkeiten aus Gleichung (4.4) können nun über die absoluten Häufigkeiten  $H$  dieser zweidimensionalen Klasseneinteilung bestimmt werden. Es wird also geschätzt:

$$\left. \begin{aligned} p(x \in x_m) &\approx \frac{H_m}{n} \\ p(y \in y_r) &\approx \frac{H_r}{n} \\ p(x \in x_m, y \in y_r) &\approx \frac{H_{m,r}}{n} \end{aligned} \right\}, \text{ für } m = 1, \dots, M \text{ und } r = 1, \dots, R.$$

Falls die Nullhypothese (d.h. Glg. (4.4)) richtig ist, dann ist die Antwort auf die Frage wieviel der insgesamt  $n$  Realisierungen in der Klasse  $m, r$  liegen, durch ein Bernoulli-Experiment gegeben.  $z_{m,r}(k, n)$  ist dann die Zufallsvariable, die angibt, wie wahrscheinlich (unter der Bedingung der Nullhypothese)  $k$  von  $n$  Realisierungen in der Klasse  $m, r$  liegen. Diese Variable ist binomial-verteilt mit dem Erwartungswert  $E_{m,r}$ :

$$\begin{aligned} E_{m,r} &= n p(x \in x_m, y \in y_r) \\ &= n p(x \in x_m) p(y \in y_r) = \frac{H_m H_r}{n}, \text{ für } m = 1, \dots, M \text{ und } r = 1, \dots, R. \end{aligned}$$

Für die zugehörige Varianz  $D_{m,r}^2$  gilt dann:

$$\begin{aligned} D_{m,r}^2 &= n p(x \in x_m, y \in y_r) (1 - p(x \in x_m, y \in y_r)) \\ &= \frac{H_m H_r}{n} \left(1 - \frac{H_m H_r}{n}\right), \text{ für } m = 1, \dots, M \text{ und } r = 1, \dots, R. \\ &\approx \frac{H_m H_r}{n}, \text{ für } m = 1, \dots, M \text{ und } r = 1, \dots, R. \end{aligned}$$

Die normierte Variable von  $z_{m,r}(k, n)$  ist dann für große  $n$  näherungsweise normalverteilt, d.h.

$$\frac{z_{m,r}(k, n) - E_{m,r}}{D_{m,r}} = N(0, 1).$$

Damit ist die Summe der Quadrate dieser Normierten von  $z_{m,r}(k, n)$  eine  $\chi^2$ -verteilte Variable:

$$\chi^2 = n \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^R \frac{\left(z_{m,r}(k, n) - \frac{H_m H_r}{n}\right)^2}{H_m H_r} \quad (4.5)$$

Diese  $\chi^2$ -verteilte Zufallsvariable hat die folgenden Freiheitsgrade. Zunächst gibt es  $M \cdot R$  Klassen, was  $M \cdot R - 1$  Freiheitsgrade ergibt. Die Anzahl der Freiheiten verringert sich jedoch um  $M - 1 + R - 1$ , da die Wahrscheinlichkeiten  $p(x \in x_m)$  und  $p(y \in y_r)$  jeweils bis auf einen Wert (der sich ergibt, weil die Summe 1 sein muß) geschätzt werden mußten. Damit ist der Freiheitsgrad der  $\chi^2$ -Verteilung  $\Phi$  gegeben durch:

$$\Phi = M \cdot R - 1 - (M + R - 2) = (M - 1)(R - 1)$$

Nun kann man mit Hilfe von Gleichung (4.5) testen, wie wahrscheinlich die vorliegende Realisation unter der Annahme der Nullhypothese ist. Dazu muß man nur für  $z_{m,r}(k, n)$  in Gleichung (4.5) die absolute beobachtete Häufigkeit  $H_{m,r}$  einsetzen. Dem damit berechneten Wert  $\chi_{ber}^2$  kann dann ein bestimmtes Signifikanzniveau zugeordnet werden.

### Wie stark ist ein möglicher stochastischer Zusammenhang?

Um die Stärke eines stochastischen Zusammenhangs zu messen, stehen verschiedene Maße zur Verfügung. So werden in den *Numerical Recipies* [12] ein Continigenzoeffizient und Cramer's  $V$  angegeben. Sie sind beide zwischen null und eins skaliert, aber können nicht objektiv bewertet werden. Auf der anderen Seite gibt es bedingte Maße, wie den Pearson Korrelationskoeffizient [14], dessen Quadrat angibt, welcher Anteil der Varianz der Variablen durch einen linearen Zusammenhang erfaßt werden kann. Spearman und Kendall geben ähnliche Koeffizienten an, die für monotone Zusammenhänge gelten [12].

Im Folgenden soll nun ein Maß aus der Informationstheorie [8] verwendet werden, daß die Stärke eines Zusammenhangs angibt, ohne auf Bedingungen wie Linearität oder Monotonie angewiesen zu sein [18].

Ausgangspunkt ist dabei die in einer Zufallsvariablen enthaltene Information  $H(X)$ , die gegeben ist durch:

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log_2 p(x) dx. \quad (4.6)$$

Hat man nun eine Stichprobe bzw. eine Zeitreihe (oder eine Variable), die diskret skaliert ist, so geht das Integral in die Summe über die relativen Klassenhäufigkeiten über:

$$H(X) = - \sum_i p(x) \log_2 p(x).$$

Hat man es mit zwei Stichproben zu tun, die keine gleichartige Information enthalten, so gilt  $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$  und die Information beider Stichproben zusammengenommen

ist die Summe der Einzelinformationen. Andernfalls, d.h. falls die Stichproben  $X$  und  $Y$  gleichartige Information enthalten, ist die gemeinsame Information  $H(X, Y)$  geringer als die Summe der Einzelinformationen. Der Betrag um den die gemeinsame Information geringer ist, heißt Transinformation  $I(X, Y)$  zwischen  $X$  und  $Y$ . Demnach gilt:

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y) - I(X, Y) \quad (4.7)$$

Theoretisch können die Informationen alle Werte zwischen null und  $+\infty$  annehmen. Es werden nun verschiedene Normierungen verwendet, um daraus relative Maße zu machen. In der Literatur findet man die folgenden Normierungen gewöhnlich alle unter dem Namen Redundanz  $R(X, Y)$ :

- Wenn man sich dafür interessiert, wie hoch der Anteil der Transinformation an der Information der Stichprobe  $X$  ist, definiert man sinnvoll:

$$R(X, Y) = \frac{I(X, Y)}{H(X)}.$$

- Wenn man sich dafür interessiert, wie hoch der Anteil der Transinformation an der Information der Stichprobe  $Y$  ist, definiert man sinnvoll:

$$R(Y, X) = \frac{I(X, Y)}{H(Y)}.$$

- Interessiert man sich für die maximale Redundanz, so kann man definieren:

$$R_{max}(X, Y) = \frac{I(X, Y)}{\min(H(X), H(Y))}.$$

- Interessiert man sich für die mittlere Redundanz, so setzt man die mittlere Information der Stichproben ein:

$$\overline{R(X, Y)} = 2 \frac{I(X, Y)}{H(X) + H(Y)}.$$

Zwar sind alle diese Maße zwischen null und eins beschränkt, aber nicht geeignet um sie mit anderen Maßen (insbesondere dem Pearson-Korrelationskoeffizient) zu vergleichen. Desweiteren sagt eine Redundanz von z.B. 10% allein noch nicht viel aus.

Es soll nun der Zusammenhang zwischen der Information und dem Pearson-Korrelationskoeffizienten gezeigt werden, der es erlaubt, letztendlich auf ein vergleichbares Maß zu kommen. Zunächst kann aus den Gleichungen (4.6) und (4.7) die folgende Gleichung für die Transinformation hergeleitet werden:

$$I(x, y) = \int_x \int_y p(x, y) \log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy \quad (4.8)$$

Um nun den Zusammenhang zum Pearson-Korrelationskoeffizienten zu erhalten, wird für  $p(x, y)$  die zweidimensionale Gauß-Verteilung eingesetzt:

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi s_x s_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{(x-\bar{x})^2}{s_x^2} - \frac{2\rho(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{s_x s_y} + \frac{(y-\bar{y})^2}{s_y^2} \right) \right\} \quad (4.9)$$

und

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_y p(x, y) dy \\ p(y) &= \int_x p(x, y) dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die Integration von Gleichung (4.8) unter Berücksichtigung von Gleichung (4.9) und (4.10) führt auf folgenden Zusammenhang:

$$I(x, y) = -\frac{1}{2} \ln(1 - \rho^2)$$

Stellt man diesen Zusammenhang nach  $\rho$  um, so erhält man den Transinformativkoeffizienten, der aus der Information abgeleitet ist, und im Fall eines linearen Zusammenhangs gleich dem Pearson-Korrelationskoeffizienten ist:

$$\rho_{I(x,y)} = \sqrt{1 - \exp(-2 I(x, y))}.$$

Diese Gleichung bildet die Transinformation, die theoretisch Werte zwischen null und unendlich annehmen kann auf das Intervall null bis eins ab. In der Praxis ist die Transinformation aber durch den kleineren Wert von  $H(X)$  und  $H(Y)$  beschränkt. Deshalb wird  $\rho_{I(x,y)}$  noch weiter normiert, in dem es auf diesen maximal möglichen Wert bezogen wird. Man erhält dann für den Transinformativkoeffizienten  $R_I$  folgenden Zusammenhang:

$$R_I = \frac{\rho_{I(x,y)}}{\rho_{max}} = \frac{\sqrt{1 - \exp(-2 I(x, y))}}{\sqrt{1 - \exp(-2 \min(H(X), H(Y)))}}.$$

Nun kann man zu  $R_I$  auch die Signifikanz ausrechnen. Dazu stellt man erneut die Nullhypothese auf, daß  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, d.h., daß  $R_I = 0$  ist. Wenn  $X$  in  $M$  und  $Y$  in  $R$  Klassen eingeteilt ist, dann ist der Erwartungswert der Transinformation unter Berücksichtigung der Nullhypothese nur von den Freiheitsgraden dieser Klasseneinteilung abhängig. Man erhält den Erwartungswert  $E(I(X, Y))$ :

$$E(I(X, Y)) = \frac{1}{2}[(M - 1)(R - 1)]$$

Nun ist  $\frac{1}{2}I(X, Y)$  genau  $\chi^2$ -verteilt mit  $\Phi = (M - 1)(R - 1)$  Freiheitsgraden. Dann gilt:

$$\chi_{\Phi, \alpha}^2 = 2nI(X, Y).$$

Mit dieser Gleichung läßt sich zu jedem berechneten Wert von  $I(X, Y)$  und deshalb auch zu jedem Wert von  $R_I$  die zugehörige Signifikanz berechnen.

Bei der Berechnung der informationstheoretischen Maße ist zu beachten, daß die Klasseneinteilung möglichst so gewählt werden sollte, daß die Klassenhäufigkeiten in etwa gleichverteilt sind [18]. Dies steht im Gegensatz zu der Einteilung, die man zweckmäßigerweise bei dem  $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest macht.

### Welcher Art ist ein möglicher stochastischer Zusammenhang?

Nachdem man nun testen kann, ob und wie stark ein Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen ist, stellt sich als nächste Frage, von welcher Art er ist. Dazu werden drei mögliche Arten des Zusammenhangs unterschieden:

1. linear
2. monoton
3. nicht monoton.

Falls der Zusammenhang rein linear ist, sollte der Pearson-Korrelationskoeffizient gleich dem Transinformationskoeffizienten sein. Theoretisch ist dies möglich, praktisch jedoch extrem unwahrscheinlich. Nur wenn in der Praxis der Transinformationskoeffizient signifikant größer ist als der Pearson-Korrelationskoeffizient, kann man mit einer bestimmten Irrtumswahrscheinlichkeit sagen, daß der Zusammenhang nicht linear ist. Die Signifikanz kann man über die Konfidenzintervalle des Korrelationskoeffizienten berechnen. (Die Konfidenzintervalle sollten mit der Fisher-Transformierten berechnet werden [14].)

Um monotone aber nicht lineare Zusammenhänge zu sehen, haben Spearman und Kendall Methoden entwickelt [12]. Spearmans Methode basiert darauf, Ranglistenplätze zu korrelieren (Pearson-Korrelation der Ranglistenplätze). Das heißt, falls großen Werten in  $X$  immer auch große Werte in  $Y$  zugeordnet sind, und kleinen Werten in  $X$  immer auch kleine Werte in  $Y$ , dann ist der Spearmankoeffizient eins, sonst geringer. Falls größeren  $X$ -Werten kleinere  $Y$ -Werte zugeordnet sind, ist der Koeffizient negativ. Auch für den Spearman-Koeffizienten  $r_s$  kann die Signifikanz getestet werden. Und zwar ist die Größe  $t_s$  mit

$$t_s = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}}$$

t-verteilt mit  $n - 2$  Freiheitsgraden.

Obwohl die Spearman-Korrelation unabhängig von der Verteilung der Variablen ist, gibt es doch das Problem, daß die hohen Rangplätze in die Korrelation wesentlich stärker eingehen

als die niedrigen. Damit reagiert die Spearman-Korrelation empfindlich auf Ausreißer. Um dieses Problem zu umgehen, hat Kendall einen Koeffizienten  $\tau$  eingeführt. Dieser Koeffizient berücksichtigt nur die Summe der Vorzeichen des Produkts zwischen  $x_i - x_{i+j}$  und  $y_i - y_{i+j}$ . Es gehen also nur Rangplatzunterschiede ein, ohne Berücksichtigung deren Größe. Dadurch reagiert Kendall's  $\tau$  allerdings empfindlich auf Rauschen. Kendall's  $\tau$  kann zwischen minus eins und eins normiert werden. Kendall hat auch gezeigt, daß unter der Annahme keines monotonen Zusammenhangs der Wert  $\tau = 0$  mit der Standardabweichung

$$s_\tau = \frac{4n + 10}{9n(n - 1)}$$

zu erwarten ist und daß dann  $\tau$  annähernd normalverteilt ist.

Falls die Variablen nur ordinal skaliert sind, ist der Kendall-Koeffizient dem Spearman-Koeffizient überlegen. Ansonsten neigt er wegen des Informationsverlustes (als Folge der ausschließlichen Berücksichtigung der Vorzeichen) dazu, einen Zusammenhang zu unterschätzen.

Falls also aus dem Unabhängigkeitstest folgt, daß sehr wahrscheinlich ein Zusammenhang vorliegt, dessen Größe man aus dem Transinformationskoeffizienten bekommt, und alle drei Korrelationskoeffizienten ununterscheidbar davon sind, handelt es sich um einen linearen Zusammenhang. Falls der Pearsonkoeffizient signifikant kleiner ist als der Transinformationskoeffizient, nicht aber der Spearman, bzw. Kendall-Koeffizient, kann man von einem monotonen Zusammenhang ausgehen. Sind aber alle Korrelationskoeffizienten kleiner als die informationstheoretische Kontingenz, folgt daraus, daß ein nicht-linearer und nicht-monotoner Zusammenhang vorliegt. Dann hilft meiner Meinung nach nur ein Blick auf das Scatterdiagramm weiter, auf dem man vielleicht die Form des Zusammenhangs sehen kann.

### Ergebnisse der Suche nach globalen Zusammenhängen

Bei der Suche nach globalen Zusammenhängen werden die vier im vorigen Abschnitt vorgestellten Koeffizienten berechnet, deren Signifikanz und der  $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest. Da man davon ausgehen kann, daß auch die klimatischen Bedingungen des Vorjahres einen Einfluß auf das Baumwachstum haben, werden alle diese Größen auch für die Monatswerte von Niederschlag und Temperatur des Vorjahres berechnet. Um das Problem der Zufälligkeit von statistischen Zusammenhängen zu beleuchten werden zusätzlich auch die klimatischen Monatswerte des Folgejahres mit in Betracht gezogen. Zwischen den letzteren und dem Baumwachstum sollten keine signifikanten statistischen Zusammenhänge zu finden sein. Insgesamt werden demnach alle betrachteten Koeffizienten und deren Signifikanzen für 36 Monatsmitteltemperaturen und 36 monatliche Niederschlagssummen pro Jahrring berechnet. In den Abbildungen 4.2 und 4.3 sind im oberen Teil jeweils die Koeffizienten des Zusammenhangs zwischen Temperatur und Baumwachstum (Abb. 4.2) und Niederschlag und Baumwachstum (Abb. 4.3) eingezeichnet.

Man sieht bei den statistischen Zusammenhängen zwischen Temperatur und Jahrringbreiten (Abb. 4.2)



- einen nur unwesentlichen Unterschied zwischen den Maßen des monotonen und linearen Zusammenhangs (d.h. eine monotone Abbildung würde keine besseren Ergebnisse liefern als eine lineare),
- daß die Transinformationskoeffizienten kaum größer sind als die Beträge der anderen Koeffizienten (was bedeutet, daß auch ein allgemeiner nichtlinearer Zusammenhang keine besseren Ergebnisse liefern würde als ein linearer),
- eine deutliche Variabilität des statistischen Zusammenhangs von Monat zu Monat, wobei die Werte des Vorjahres schwach negativ eingehen, der Vorwinter positiv und der Sommer des zugeordneten Jahres wieder negativ (dabei insbesondere der Juni und August),
- auch statistische Zusammenhänge zu den klimatischen Parameter des Folgejahres zu sehen sind.

Bei den statistischen Zusammenhängen zwischen den monatlichen Niederschlagssummen und den Jahrringbreiten (Abb. 4.3) erkennt man

- einen nur unwesentlichen Unterschied zwischen den Koeffizienten des monotonen und linearen Zusammenhangs, aber
- einen deutlich größeren Koeffizienten der Transinformation, was suggeriert, daß man mit einem nicht-linearen und nicht-monotonen Zusammenhang deutlich mehr Varianz erklären können wird,
- während der monotone und lineare Zusammenhang für fast alle Monate um null schwankt, ist er für den Mai des Vorjahres stark negativ und für den Juli des Wachstumsjahres stark positiv.

Es stellt sich nun die Frage, für welche der statistischen Zusammenhänge die oben diskutierten Koeffizienten glaubwürdig (in statistischem Sinne) sind. Dazu wird zu allen Koeffizienten die Signifikanz berechnet. Diese sagt aus, bei welchem Anteil von Gauß'schen weißen Zufallsreihen der gleichen Länge kein solch hoher Koeffizient auftritt. Die Signifikanzen der einzelnen Koeffizienten und die Ergebnisse des  $\chi^2$ -Unabhängigkeitstests sind in den unteren Teilen der Abbildungen 4.2 und 4.3 für Werte größer .9 dargestellt. Bei der Interpretation der Ergebnisse ist folgendes zu beachten. Ein Wert von .9 bedeutet, daß nur in 10 % der Fälle ein so hoher Koeffizient durch Zufall auftritt. Da nun aber ein Jahr 12 Monate hat ist es wahrscheinlicher, daß pro untersuchtes Jahr ein Koeffizient durch Zufall so hoch ist, als das kein Koeffizient dieses 90 % Signifikanzniveau überschreitet. Deshalb soll nun für die Schwellen  $p = .9, .95$  und  $.99$  berechnet werden, wie wahrscheinlich es ist, daß  $k$  der 12 möglichen Werte durch Zufall über der Schwelle liegen. Diese Wahrscheinlichkeit folgt der Binomialverteilung (Bernoulli-Experiment) deren Dichte gegeben ist durch

$$b(p, k) = \binom{12}{k} (1-p)^k p^{12-k}. \quad (4.11)$$

Mit dieser Gleichung kann man berechnen, wieviele Werte  $k$  über einer Schwelle  $p$  liegen müssen, damit dies ein Ereignis darstellt, daß nur in  $l$  Prozent der Realisationen stattfindet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.1 angegeben.

*Tabelle 4.1: Tabelle der Ergebnisse des Tests auf Überzufälligkeit der Anzahl der signifikanten Koeffizienten aus den Abbildungen 4.2 und 4.3.*

$p$	$k(l = .1)$	$k(l = .01)$
.9	3	4
.95	2	3
.99	1	1

Tabelle 4.1 besagt z.B., daß, wenn in einem der drei Jahre (Vorjahr, Jahr des Wachstums, Folgejahr) vier oder mehr Koeffizienten einer Art eine Signifikanz größer .9 aufweisen, dies nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % Zufall ist. Benutzt man Tabelle 4.1 Zur Interpretation der unteren Teile der Abbildungen 4.2 und 4.3, so erkennt man, daß auch die klimatologische Information des Niederschlags der Folgejahre höchst signifikant in den Jahrringbreiten zu sehen ist. Andererseits ist die Temperatur des Vorjahres keinesfalls signifikant in den Jahrringen zu sehen. Dieses Ergebnis ist außerordentlich befremdend.

### 4.3.2 Suche nach speziellen Zusammenhängen

Da die Suche nach globalen Zusammenhängen zwischen den klimatologischen Zeitreihen und der Zeitreihe der Jahrringbreiten nicht sehr erfolgreich war, wird nun nach Zusammenhängen zwischen speziellen Komponenten der Zeitreihen gesucht. Dazu wird jede der Zeitreihen entsprechend einer klassischen Zeitreihenanalyse in signifikante orthogonale Anteile zerlegt. Diese können dann jeweils untereinander verglichen werden, so daß ein ähnliches Verhalten unterschiedlicher Reihen bei gleichen Teilkomponenten wie z.B. Extremwerten, Trends oder signifikanten harmonischen Anteilen erkannt werden kann.

Dazu werden die Zeitreihen der klimatologischen Parameter in die folgende Summe signifikanter Anteile zerlegt:

$$x(t) = m + t_r(t) + s(t) + g(t) + e(t) + h(t) + r(t) \quad (4.12)$$

mit:

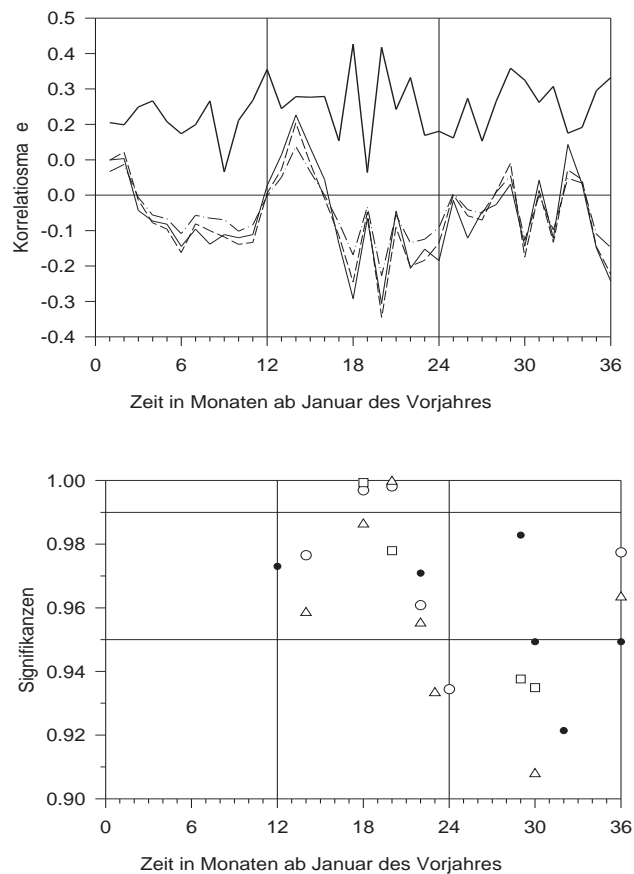


Abbildung 4.2: Oben: Verschiedene Maße des Zusammenhangs zwischen der Zeitreihe der Jahrringbreiten von Kiefern in Brandenburg und Monatsmitteltemperaturen in Potsdam zwischen 1891 und 1991: Transinformation (dicke durchgezogene Linie), Pearson-Korrelation (dünne durchgezogene Linie), Spearman-Korrelation (dünne unterbrochene Linie) und Kendall-Korrelation (Strichpunktlinie). Unten: Verschiedene Signifikanzmaße: Quadrate =  $\chi^2$ ,  $\triangle$  = Signifikanz der Spearman-Korrelation,  $\circ$  = Signifikanz der Pearson-Korrelation und  $\bullet$  = Signifikanz der Transinformation.

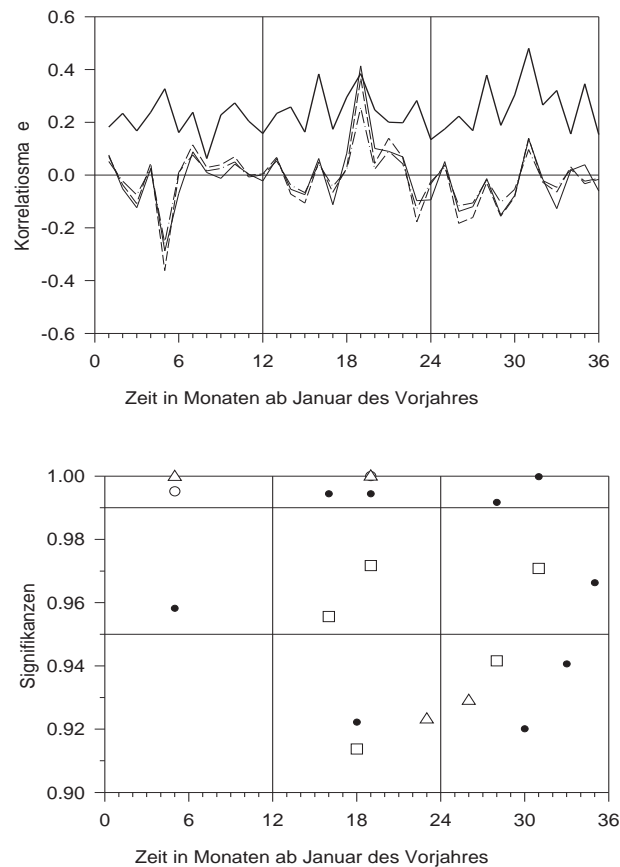


Abbildung 4.3: Oben: Verschiedene Maße des Zusammenhangs zwischen der Zeitreihe der Jahrringbreiten von Kiefern in Brandenburg und monatlicher Niederschlagssummen in Potsdam zwischen 1891 und 1991: Transinformation (dicke durchgezogene Linie), Pearson-Korrelation (dünne durchgezogene Linie), Spearman-Korrelation (dünne unterbrochene Linie) und Kendall-Korrelation (Strichpunktlinie). Unten: Verschiedene Signifikanzmaße: Quadrate =  $\chi^2$ ,  $\Delta$  = Signifikanz der Spearman-Korrelation,  $\circ$  = Signifikanz der Pearson-Korrelation und  $\bullet$  = Signifikanz der Transinformation.

$x(t)$	=	Zeitreihe,
$m$	=	Mittelwert der Zeitreihe,
$t_r(t)$	=	Trendkomponente,
$s(t)$	=	saisonale Komponente,
$g(t)$	=	glatte Komponente (ohne Trend),
$e(t)$	=	seltene (extreme) Ereignisse,
$h(t)$	=	harmonische (nichtsaisonale) Komponenten,
$r(t)$	=	Rauschen.

Bei der Zerlegung der Baumringparameterreihe wird natürlich keine signifikante saisonale Komponente gesucht. Die Analyse zeigt, welche dieser Komponenten signifikant in der Zeitreihe zu finden sind, und welche Gestalt sie im Einzelnen haben. In den folgenden Abschnitten sind die Methoden beschrieben, mit deren Hilfe die einzelnen Komponenten in der Zeitreihe detektiert und beschrieben werden, die dann im letzten Abschnitt verglichen werden.

### Trendkomponente

Als Trendkomponente werden hier lineare und nicht-lineare Trends bis zur fünften Ordnung untersucht, d.h. es werden folgende fünf Ansätze verwendet:

$$t_{r,i} = a_i + b_i t^i, \text{ für } i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (4.13)$$

Davon werden nur diejenigen Terme berücksichtigt, die signifikant in der Reihe enthalten sind, d.h. einen signifikanten Beitrag zu deren Varianz leisten. Wesentlich ist hierbei, daß jeder Term einzeln (univariate Korrelation bzw. Regression) eingeht. Dadurch bleibt die glatte (nicht Trend-) Komponente unberücksichtigt (es gibt keine Wendepunkte). Trägt keiner der Terme signifikant zur Varianz der Reihe bei, so besitzt sie keinen signifikanten Trend. Trägt nur der Term mit  $i=1$  bei, so ist ein signifikanter linearer Trend gefunden, tragen auch (oder nur) Terme höherer Ordnung bei, so ist ein signifikanter nichtlinearer Trend gefunden, der progressiv oder degressiv steigend oder fallend sein kann. Da die Durchführung der Regression in Form einer Rekursion gemeinsam mit der saisonalen Komponente durchgeführt wird, wird sie im nächsten Abschnitt gemeinsam mit der Anpassung der saisonalen Komponente erläutert. Die Untersuchung von nichtlinearen Trends bis zur fünften Ordnung ist analog zur Untersuchung der glatten Komponente (ohne Trend) gewählt und wird in dem entsprechenden Abschnitt diskutiert.

### Saisonale Komponente

Die saisonale Komponente besteht aus Schwingungen mit den Wellenzahlen  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  und 6 pro Jahr. Damit läßt sich der mittlere Jahresgang der Monatswerte exakt wiedergeben. Hier wird ein Ansatz gewählt, der nur signifikante Beiträge selektiert, und es somit erlaubt den signifikanten Teil des mittleren Jahresgangs anzugeben. Nun muß der

Jahresgang keineswegs starr sein, sondern kann Fluktuationen oder langsamen systematischen (glatten) Änderungen unterliegen. Um glatte Änderungen im Jahresgang erfassen zu können, wird zugelassen, daß die Amplitude jeder im Jahresgang enthaltenen Schwingung sich linear und quadratisch im Laufe der Zeit ändern kann, d.h. für jede der sechs Wellenzahlen  $j$  wird für die Amplituden der harmonischen Anteile ein quadratisches Polynom angesetzt. Damit folgt für die saisonale Komponente und deren glatte zeitliche Änderung ein Ansatz mit folgenden 18 Termen:

$$s_{j,k} = c_{j,k} + d_{j,k}t^k \cos\left(2\pi\frac{j}{12}t\right) + e_{j,k}t^k \sin\left(2\pi\frac{j}{12}t\right), \text{ für } k = 0, 1, 2 \text{ und } j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (4.14)$$

Dieser Ansatz berücksichtigt die starren Anteile ( $k=0$ ), die sich linear mit der Zeit ändernden Anteile ( $k=1$ ) und die sich stärker als linear mit der Zeit ändernden Anteile ( $k=2$ ) für alle sechs Wellenzahlen  $j$ . So können zusätzlich zum signifikanten Jahresgang auch signifikante lineare und progressiv sowie degressiv steigende bzw. fallende Änderungen in der Amplitude und Phase des Jahresgangs erkannt werden. Die zu einer Wellenzahl gehörenden Komponenten können zusammengefaßt werden zu

$$s_j(t) = A_j(t) \cos\left(2\pi\frac{j}{12}(t - t_j)\right) \quad (4.15)$$

mit der Amplitudenfunktion

$$A_j(t) = \sqrt{\sum_{k=0}^2 (d_{j,k}^2 + e_{j,k}^2) t^{2k}}$$

, für alle signifikanten  $k$  und der Phasenverschiebung

$$t_j(t) = \frac{12}{2\pi j} \arctan\left(\frac{\sum_{k=0}^2 d_{j,k} t^k}{\sum_{k=0}^2 e_{j,k} t^k}\right)$$

, für alle signifikanten  $k$ .

Falls zu einer bestimmten Wellenzahl  $j$  nur ein signifikantes  $k$  gefunden wird, bedeutet dies, daß sich die Phasenlage nicht ändert, während sich die Amplitude gemäß  $t^k$  ändert. Damit läßt sich schon allein aus der Kenntnis der signifikanten Anteile eine Aussage über strukturierte Veränderungen in der Amplitude und Phasenlage des Jahresgangs treffen. Der signifikante Jahresgang ist dann darstellbar als Summe über alle signifikanten  $s_{j,k}$ .

Um signifikante Trendkomponenten und starre bzw. glatt veränderliche Saisonfiguren zu finden, wird nach signifikanten Zusammenhängen der zu untersuchenden Zeitreihen und den 23 orthogonalen Basisfunktionen (den fünf Trend- und den 18 Saisonfiguren) gesucht. Der signifikanteste gefundene Zusammenhang (zu erkennen am höchsten univariaten Korrelationskoeffizienten) wird dann aus der Reihe eliminiert und gilt als erklärt. Danach

wird erneut nach signifikanten Zusammenhängen des nicht erklärten Anteils mit diesen Basisfunktionen gesucht. Das Verfahren zieht somit rekursiv immer die am signifikantesten erklärbaren Anteile ab, bis keine signifikante Korrelation zu einer der Basisfunktionen mehr besteht. Nach diesem Arbeitsschritt können folgende Fragen beantwortet werden:

1. Gibt es eine signifikante saisonale Komponente und einen signifikanten Trend in der Zeitreihe?
2. Wieviel Varianz wird durch diese Komponenten beschrieben?
3. Welche Komponente beschreibt die meiste Varianz?
4. Wie sieht die starre Saisonfigur aus?
5. Hat sich die Saisonfigur signifikant geändert?
6. Wie hat sich die Saisonfigur geändert (Amplitude, Phasenlage)?
7. Welche Form und Stärke haben die signifikanten linearen bzw. nichtlinearen Trends?

### **Glatte (tieffrequente) Komponente**

Um die glatte tieffrequente Komponente der Zeitreihen zu extrahieren, werden polynomiale Ansätze bis zur fünften Ordnung mit den Residuen der Zeitreihen (multipel) korreliert, d.h. Ansätze der Form

$$g_I(t) = a_0 + \sum_{i=1}^I a_i t^i, \text{ für } I = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (4.16)$$

Dabei wird das Polynom der höchsten Ordnung  $I$  verwendet, daß noch signifikant mehr Varianz erklärt, als die Polynome mit einer Ordnung kleiner  $I$ . Dieser Anteil wird mittels einer multiplen Regression aus der Reihe eliminiert und getrennt betrachtet. Die so eliminierte glatte Komponente kann bis zu vier Extremwerte (signifikant wärmere und kältere bzw. niederschlagsreichere und niederschlagsärmere Zeiten bei den klimatologischen Parametern und Zeiten mit signifikant besserem und schlechterem Baumwachstum bei den Jahrringreihen) und drei Wendepunkte aufweisen. Somit erhält man eine Beschreibung der signifikanten glatten Komponente. Durch starkes Tiefpaßfiltern wäre zwar auch eine glatte Komponente sichtbar geworden, jedoch hätten keinerlei Aussagen über deren signifikanten Beitrag zur Varianz der Zeitreihe getroffen werden können. Da für die glatte Komponente ein polynomialer Ansatz bis zur fünften Ordnung verwendet wurde, beschreibt sie den niederfrequenten Anteil der Reihe bis zur Wellenzahl 2. Dieser hätte mit einer harmonischen Analyse nur schlecht erfaßt werden können, da bei der harmonischen Analyse nach harmonischen Anteilen mit vorgegebenen festen Perioden (Fourier-Stützstellen) gesucht wird. Im Gegensatz dazu findet die Anpassung des Polynoms aber auch deutlich nichtharmonische niederfrequente Schwankungen.

## Rauschen

Wenn außer dem Trend, der Saisonkomponente und der glatten Komponente keine weiteren Strukturen in der Zeitreihe vorhanden sind, so muß der nicht durch diese Komponenten beschriebene Anteil der Zeitreihe durch ein Zufallsrauschen beschreibbar sein. Dies wird im nächsten Schritt getestet. Dazu wird zunächst das Residuum  $R = x(t) - m - t_r(t) - s(t) - g(t)$  auf seine Verteilung hin untersucht. Läßt sich die Verteilung nicht von einer Gauß-Verteilung unterscheiden, so bedeutet das nach dem zentralen Grenzwertsatz, daß dieses Residuum als Summe vieler im einzelnen unbedeutender Einflüsse betrachtet werden darf [3]. Getestet wird dies mit dem Kolmogoroff-Smirnoff-Test [12]. Ist das Residuum zusätzlich noch mittelwert-, varianz- und autokovarianzstationär, so kann es als Realisation eines stochastischen Prozesses aufgefaßt werden [4]. Die Stationarität des Residuums wird getestet, indem die Zeitreihe in zwei Intervalle eingeteilt wird und von jedem Intervall Mittelwert, Standardabweichung und Autokorrelationsfunktion miteinander verglichen werden. Für die Mittelwerte wird hierzu ein t-Test verwendet, für die Standardabweichungen ein F-Test [14]. Zum Test der Autokovarianzstationarität wird die Autokorrelationsfunktion der ersten und zweiten Hälfte des Residuums geschätzt und Fisher-Transformiert [14]. Dadurch kann davon ausgegangen werden, daß für jede Zeitverschiebung die Differenz zwischen dem Autokorrelationskoeffizienten der ersten und der zweiten Hälfte Gauß-verteilt ist. Damit ist diese Differenz leicht auf Überzufälligkeit zu testen. Sind für eine Residuenreihe die Stationaritätsannahmen erfüllt und ist ihre Verteilung nicht von einer Gauß-Verteilung zu unterscheiden, so kann weiterhin deren Autokorrelationsfunktion und partielle Autokorrelationsfunktion untersucht werden. Damit ist ein linearer stochastischer Prozeß an das Residuum anpaßbar und die Zeitreihe ist vollständig beschrieben. Zusätzlich kann auch die Spearman-Autokorrelationsfunktion [12] und die Autoinformationsfunktion [18] berechnet werden, die Aufschluß darüber geben, um wieviel besser das Residuum durch eine streng monotone Abbildung eines linearen Prozesses (Spearman-Koeffizient) oder einen nichtlinearen stochastischen Prozeß beschreibbar ist (Autoinformation).

## Seltene Ereignisse

Leider gelingt eine Zerlegung, wie sie oben beschrieben ist, nur selten. Der am wenigsten kompliziertere Fall ist der, daß die Verteilung des Residuums fast Gauß-verteilt ist, d.h. hier, daß der Unterschied zur theoretischen Verteilung von wenigen extremen Werten herrührt. Diese extremen Werte  $e(t)$  können in der Zeitreihe als seltene Ereignisse sichtbar sein, ohne welche die Verteilung Gauß-verteilt wäre. Nachdem die variable Saisonfigur, Trends und weitere glatte Komponenten eliminiert sind, können Extremwerte, die nicht zum Rest der Verteilung passen und somit seltene Ereignisse darstellen, sichtbar werden. Da die Methode der kleinsten Quadrate, mit welcher die Trendkomponente und die Saisonfigur angepaßt wurden, sehr sensibel auf extreme Werte reagiert, muß nach der Eliminierung der Extremwerte erneut die Regression mit den Basisfunktionen durchgeführt werden.

Findet man Extremwerte, so stellt sich die Frage, woher diese kommen. Es gibt zwei un-



terscheidbare Ursachen, die dafür in Frage kommen. Einerseits können sie seltene zufällige Werte der Beobachtungsgröße selbst sein (und somit Teil des Rauschens), andererseits kann ein spezielles Ereignis zu diesen Werten geführt haben (Ausreißer). Dies könnten Fehler in der Datenaufnahme und -aufbereitung sein, oder eine außergewöhnliche klimatologische Situation. Der im Folgenden vorgestellte Test dient nun dazu, zu berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Extremwert ein zufälliges seltenes Ereignis darstellt, d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit er verträglich mit der dem Residuum zugrundeliegenden Verteilung ist. Dazu wird von der Hypothese ausgegangen, daß die restlichen Werte des Residuums Gauß-verteilt sind. Diese Hypothese muß natürlich zunächst getestet werden. Falls das Residuum nicht Gauß-verteilt ist, muß man entweder

- eine andere theoretische Verteilung anpassen (und die Teststrategie erneut lösen), oder
- das Residuum in eine Gauß-verteilte Reihe transformieren.

Hier wird von einem Residuum als einer Zeitreihe von identisch normalverteilten unabhängigen Variablen ausgegangen (Gaußsches Rauschen). Diese hat die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right). \quad (4.17)$$

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P(z \leq Z)$  folgt dann

$$P(z \leq Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^Z \exp\left(-\frac{z'^2}{2}\right) dz'. \quad (4.18)$$

Für die Wahrscheinlichkeit eine Zahl zwischen  $\pm Z$  anzutreffen, folgt dann

$$P(-Z \leq z \leq Z) = P(Z) - P(-Z). \quad (4.19)$$

Da die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Normalverteilung eine gerade Funktion ist, gilt weiter

$$P(-Z) = 1 - P(Z). \quad (4.20)$$

Daraus folgt sofort:

$$P(-Z \leq z \leq Z) = 2P(Z) - 1. \quad (4.21)$$

Aus dem gleichen Grund kann man für  $Z > 0$  Glg. (4.18) umformulieren zu

$$P(z \leq Z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^Z \exp\left(-\frac{z'^2}{2}\right) dz'. \quad (4.22)$$

Dieses Integral ist nicht analytisch lösbar. Jedoch gibt es ein ähnliches Integral, für das z.B. in den *Numerical Recipes* [12] Reihen- und Partialbruchnäherungen angegeben werden. Dieses "ähnliche" Integral ist die sogenannte Errorfunktion und hat folgende Gestalt:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du. \quad (4.23)$$

Um das Integral in Glg. (4.22) in diese Form zu bringen, wird eine einfache Variablentransformation durchgeführt. Dazu wird Glg. (4.22) zunächst umgeschrieben zu

$$P(z \leq Z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^Z \exp\left(-\left[\frac{z'}{\sqrt{2}}\right]^2\right) dz'. \quad (4.24)$$

Transformiert wird nun  $t = \frac{z'}{\sqrt{2}}$ , d.h.  $z' = \sqrt{2}t$ , mit der Ableitung  $\frac{dz'}{dt} = \sqrt{2}$ . Damit folgt für  $P(z \leq Z)$

$$P(z \leq Z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t(Z)} \exp(-t^2) \frac{dz'}{dt} dt. \quad (4.25)$$

Setzt man die Ableitung und die transformierte Integralgrenze ein, so erhält man

$$P(z \leq Z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{Z}{\sqrt{2}}} \exp(-t^2) dt = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)\right). \quad (4.26)$$

Aus den Gleichungen (4.21) und (4.26) folgt nun

$$P(-Z \leq z \leq Z) = \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.27)$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, durch Zufall aus einer identisch normalverteilten Variable einen Wert zu ziehen, dessen Betrag kleiner  $Z$  ist.  $1 - P(-Z \leq z \leq Z)$  ist dann die Wahrscheinlichkeit durch Zufall einen mindestens so großen Wert zu ziehen wie  $Z$ . Diese Wahrscheinlichkeit gilt für den Fall, daß man einmal zieht. Die Zeitreihe, die untersucht werden soll, besteht aber aus  $N$  Werten. Sie stellt damit gemäß den Annahmen eine Realisation dar, bei der  $N$ -mal hintereinander (unabhängig) eine solche Zufallszahl gezogen wurde. Dies wiederum ist ein Bernoulli-Experiment. Die Wahrscheinlichkeit, bei  $N$  Realisationen  $k$  mal einen Wert mit der Eintrittswahrscheinlichkeit  $1 - P(-Z \leq z \leq Z)$  zu erhalten, folgt demnach einer Binomialverteilung. Für Werte von  $N \geq 100$  und  $1 - P(-Z \leq z \leq Z) \leq .05$  kann diese Verteilung durch die Poissonverteilung genähert werden. Somit ist die Wahrscheinlichkeit für das zufällige  $k$ -malige Auftreten eines solch großen (oder größeren) Wertes gegeben durch

$$p(k, N, 1 - P(-Z \leq z \leq Z)) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad (4.28)$$

mit  $\lambda = N(1 - P(-Z \leq z \leq Z))$ . Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer Zeitreihe der Länge  $N$  ein solch extremer Wert durch Zufall nicht auftritt ist demnach

$$p(k = 0, N, 1 - P(-Z \leq z \leq Z)) = \exp\left[-N \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)\right] \quad (4.29)$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Wert mit dem Abstand  $\|z\| \geq Z$  vom Mittelwert der normierten Gaußverteilung in einer Zeitreihe des Umfangs  $N$  durch Zufall mindestens einmal auftritt, gegeben durch

$$1 - p(k = 0, N, 1 - P(-Z \leq z \leq Z)) = 1 - \exp\left[-N \operatorname{erf}\left(\frac{Z}{\sqrt{2}}\right)\right]. \quad (4.30)$$

Bei der Durchführung des Tests wird wie folgt vorgegangen:

Zunächst wird der am weitesten vom Mittelwert entfernte Wert der Verteilung gesucht und als möglicher Ausreißer ins Auge gefaßt. Aus den restlichen Werten werden Mittelwert und Standardabweichung der zugrundeliegenden Verteilung geschätzt. Mit Hilfe des Kolmogoroff-Smirnoff-Tests wird getestet, ob die Verteilung der restlichen Werte signifikant von der Gaußverteilung abweicht. Nur wenn dies nicht der Fall ist, darf der Test weiter durchgeführt werden. Im nächsten Schritt wird der normierte Abstand des möglichen Ausreißers vom Mittelwert der Verteilung der restlichen Werte berechnet. Daraufhin kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß ein Wert, der so weit oder weiter vom Mittelwert der Verteilung entfernt liegt, durch Zufall als eine Realisation der Verteilung auftritt (Gleichung (4.27)). Die Zeitreihe mit  $N$  Werten stellt dann ein Bernoulli-Experiment mit  $N$  Realisationen dar. Im letzten Schritt braucht man nun nur noch zu testen, wie wahrscheinlich kein solch großer Wert in einer Zeitreihe der gegebenen Länge auftritt (Gleichung (4.29)).

Treten in einer Reihe mehrere seltene Ereignisse auf, so können sie durch sukzessive Anwendung des Tests gefunden werden (man beachte, daß dann erst nach Abzug aller Ausreißer die Gaußverteilung erkannt werden muß). In diesem Fall können folgende Fragen beantwortet werden:

1. Treten die seltenen Ereignisse insbesondere in bestimmten Jahreszeiten auf?
2. Handelt es sich um hauptsächlich positive oder negative Extrema?
3. Können sie durch einen Extremwertprozeß beschrieben werden?

### Harmonische Anteile

Um weitere harmonische Anteile außer der Saisonkomponente zu detektieren, wird eine harmonische Analyse durchgeführt. Dazu wird zunächst die spektrale Dichte geschätzt [13]. Leider sind Spektralschätzer unabhängig von der Länge der Zeitreihe schlechte Schätzer, in dem Sinn, daß sie nicht konsistent [13] sind. Das heißt sie müssen auch für noch so lange Reihen nicht gegen den wahren Wert konvergieren. Ihre Varianz ist immer von der Größenordnung des Schätzers selbst. Deshalb werden die Daten vor der Spektralanalyse mit einer Fensterfunktion (hier wird das sog. Bell-Taper verwendet [17] multipliziert. Zur Durchführung der harmonischen Analyse wird getestet, ob der höchste Peak im Spektrum überzufällig hoch ist. Dazu wird ein von Walker 1914 entworfener Test verwendet [13], der nur unter der Annahme von harmonischen Anteilen in weißem Rauschen exakt ist, aber bei den hier untersuchten Residuen, mit sehr wenig Autokorrelation, anwendbar erscheint. Zum Vergleich wird noch ein einfaches theoretisches Spektrum verwendet. Dies ist das Spektrum des weißen Rauschens, falls der erste Autokorrelationskoeffizient nicht signifikant größer als null ist, ansonsten ist es das Spektrum des zugeordneten AR(1)-Prozesses (Markov-Spektrum). Zusätzlich wird ein Anderson-Darling-Test auf weißes Rauschen durchgeführt,

der, da er auf dem kumulativen Spektrum beruht (das seinerseits erwartungstreu und konsistent ist [13]), recht zuverlässige Entscheidungen ermöglicht. Zeichnen sich keine signifikanten harmonischen Anteile ab und wird ein deutlicher Unterschied zum theoretischen Vergleichsspektrum gefunden, so kann man davon ausgehen, daß das Residuum mindestens durch einen AR(2)-Prozeß zu beschreiben ist.

### Ergebnisse der Suche nach speziellen Zusammenhängen

**Zerlegung der Temperaturreihe.** Bei der Zerlegung der Reihe der monatlichen Mitteltemperaturen von Potsdam treten die folgenden signifikanten Strukturen auf:

- Ein linearer Trend
- Eine starre Saisonkomponente
- Eine glatte Komponente vom Grad 4
- Ein stationäres Gauß'sches Rauschen (AR(1)-Prozeß)
- Keine signifikanten harmonischen Anteile
- Folgende Minima, die mit über 90 % Wahrscheinlichkeit nicht zum Rauschen passen:
 

Januar	1893
Februar	1895
Februar	1929
Januar	1940
Januar	1942
Februar	1947
Februar	1954
Februar	1956
Januar	1963
Dezember	1969
Februar	1986

Entsprechend der Ergebnisse der Zerlegung kann die Zeitreihe der monatlichen Mitteltemperaturen in Trend, Saison, glatte Komponente, ein stationäres Rauschen und 11 Extrema zerlegt werden. Dabei treten nur negative Extrema auf und diese nur im Winter. Die Saisonfigur wird nicht für die weiteren Analysen verwendet, sondern einfach eliminiert, da sie keinen Einfluß auf die Schwankungen der jährlichen Jahringbreiten hat.

**Zerlegung der Niederschlagsreihe.** Bei der Reihe der monatlichen Niederschlagssummen werden folgende Komponenten signifikant erkannt:

- Kein Trend

- Eine variable Saisonfigur
- Eine glatte Komponente vom Grad 3
- Ein Rauschen (nicht-Gauß'sches weißes Rauschen)
- Keine harmonischen Anteile
- keine Extremwerte

Zunächst sieht man Änderungen in der Saisonfigur. Diese sind zwar signifikant, werden aber für die weitere Analyse nicht separiert, da nur der starre Anteil der Saisonkomponente keinen Zusammenhang zu den Schwankungen der Jahrringbreiten hat. Im Niederschlag ist kein signifikanter Trend zu erkennen. Die glatte Komponente wird durch ein Polynom vom Grad 3 ausgedrückt. Das Rauschen hat die unangenehme Eigenschaft nicht Gaußverteilt zu sein. Es hat keine Autokorrelation. Es werden keine signifikanten harmonischen Anteile gefunden und keine Extremwerte.

**Zerlegung der Jahrringreihe.** Der Trend und die glatte Komponente der Zeitreihe der Jahrringbreiten kann durch ein Polynom dritten Grads repräsentiert werden. Die Verteilung des Residuums ist nicht von einer Gauß-Verteilung zu unterscheiden, aber das Residuum ist nicht stationär. Die Stationarität ist für die Varianz und die Autokovarianzfunktion nicht erfüllt. Die harmonische Analyse ergibt eine (mit 99.9 %) signifikante Schwingung bei 19.57 Jahren.

**Zusammenhänge zwischen den Komponenten.** Hier soll nun nach Zusammenhängen zwischen den Komponenten der verschiedenen Reihen gesucht werden. Zunächst scheint es sinnvoll die Summen aus Trend und glatter Komponente miteinander zu vergleichen. Zu diesem Zweck sind in Abb. 4.4 diese Komponenten für die drei Zeitreihen eingezeichnet. Wie man leicht sieht, kann kein einheitliches Verhalten erkannt werden. Da weiterhin nur die Zeitreihe der Jahrringbreiten eine signifikante harmonische Schwingung aufweist, können auch keine gemeinsamen harmonischen Komponenten erkannt werden. Zwar werden in der Reihe der Jahrringbreiten keine Extremwerte erkannt, jedoch zeigt Abbildung 4.5, daß jedes Jahr, daß von einem extrem kalten Winter eingeleitet wurde, zu relativ niedrigen Jahrringbreiten führte. Daraus läßt sich ein statistischer Zusammenhang zwischen den extrem kalten Wintern einerseits und dem Baumwachstum andererseits vermuten, den es zu charakterisieren gilt. Dazu kommen meines Erachtens Methoden wie Wavelet-Zerlegung oder Superposed Epoch Analysis in Frage. Jedoch wird dem Problem hier nicht weiter nachgegangen. Stattdessen wird im nächsten Abschnitt nach Zusammenhängen zwischen den Hauptkomponenten der Variation der klimatischen Größen und den Jahrringbreiten gesucht.

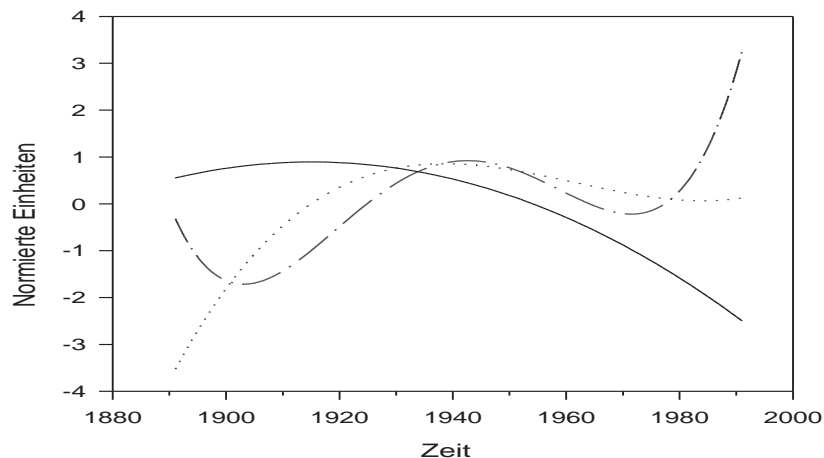


Abbildung 4.4: Vergleich der Summe aus Trend und glatter Komponente von monatlichen Niederschlagssummen und monatlichen Mitteltemperaturen in Potsdam, sowie Jahrringen von Kiefern in Brandenburg für den Zeitraum von 1891 bis 1991.

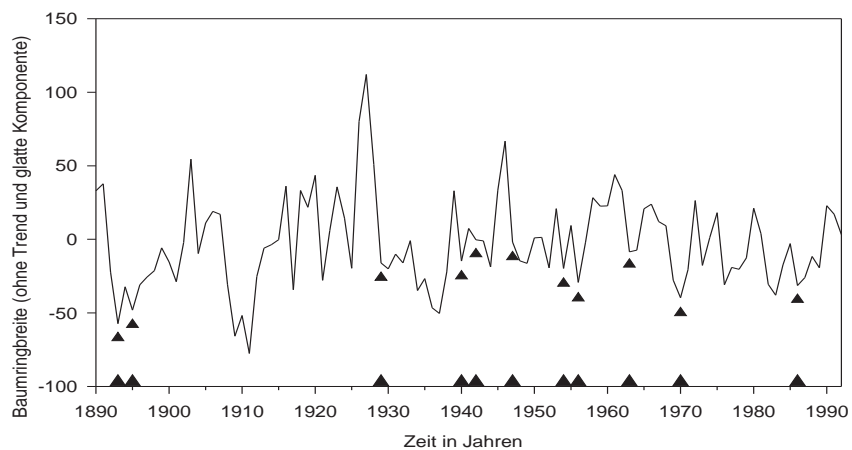


Abbildung 4.5: Zeitlicher Verlauf der Jahrringbreiten von Kiefern in Brandenburg von 1891 bis 1991 nach Abzug von Trend und glatter Komponente, sowie Jahre mit extrem kalten Wintern (markiert durch Dreiecke)

### 4.3.3 Hauptkomponenten der Variation der klimatischen Größen

Der Abschnitt 4.3.2 war der Zerlegung der Zeitreihen in spezielle Strukturen und der Suche nach Zusammenhängen zwischen diesen gewidmet. Die Zerlegung der Zeitreihen wurde dabei nach einem vorgegebenen Muster durchgeführt. Hier sollen die Zeitreihen nun in Komponenten zerlegt werden, die nicht vorher von außen vorgegeben werden. Stattdessen soll die Variation der Reihen der klimatischen Größen in Hauptkomponenten zerlegt werden. So ist z.B. die Variation der monatlichen Mitteltemperaturen um den mittleren Jahresgang ursprünglich durch die 12 Monatsreihen dieser Abweichungen ausgedrückt. Diese Reihen sind weder voneinander unabhängig (es bestehen Korrelationen) noch beschreibt eine einzelne Reihe eine bestimmte Struktur der Abweichung vom mittleren Jahresgang. Aus den 12 Monatsreihen lassen sich aber durch die Hauptkomponentenanalyse 12 neue Reihen erzeugen, die

1. orthogonal zueinander sind,
2. Jahresgänge der Abweichungen vom mittleren Jahresgang darstellen und
3. drittens nach ihrem Anteil an der Gesamtvarianz der Abweichungen vom mittleren Jahresgang sortiert sind.

Der wesentliche Schritt der Hauptkomponentenanalyse ist die Hauptachsentransformation. Geht man davon aus, daß man  $N$  Zeitreihen der Länge  $J$  vorgegeben hat, so stellen diese eine Punktwolke von  $J$  Punkten im  $N$ -dimensionalen Raum dar. Man kann die  $N$  skalaren Zeitreihen somit auch als eine  $N$ -dimensionale Vektorzeitreihe auffassen. Ein Vektor (und auch eine Reihe von Vektoren) kann bezüglich einer beliebigen Basis im Raum formuliert werden. Ziel der Hauptachsentransformation ist es nun, eine andere, sinnvollere Basis zu verwenden, als die durch die Zeitreihen vorgegebene. Dies geschieht in zwei Schritten. Zunächst wird der Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt der Punktwolke gesetzt. Dadurch wird in der Anwendung dieser Arbeit der mittlere Jahresgang eliminiert. Im zweiten Schritt wird das Koordinatensystem dann so gedreht, da die erste Koordinate in Richtung der größten Varianz der Punktwolke zeigt. Damit ist die erste Hauptachse festgelegt und die Varianz in dieser Richtung ist die erste Hauptkomponente. Die nächste Drehung wird dann um diese Koordinatenachse gemacht, und zwar so, daß die zweite Hauptachse (die orthogonal zur ersten stehen muß) in Richtung der größten verbleibenden Varianz zeigt. Dieser Vorgang wird so oft wiederholt, bis eine neue  $N$ -dimensionale Basis geschaffen ist. Nach dieser Transformation ist die Varianz der Punktwolke (und damit auch der Originalreihen) so auf neue Koordinaten (und damit auch neue Zeitreihen) verteilt, daß die Varianz dieser Reihen mit zunehmender Reihennummer abnimmt. Die erste Hauptachse beschreibt also die Hauptvarianz, die  $N$ -te Hauptachse die geringste Varianz. Damit kann man sehen, ob die Variation auf wenige Musterjahresgänge reduziert werden kann. In diesem Fall beschreiben die ersten Hauptkomponenten schon einen großen Anteil

der Gesamtvarianz. Andernfalls, d.h. falls die Varianz nur sehr langsam mit zunehmender Hauptkomponente abfällt, gibt es keine typischen Hauptstrukturen. Diese Information steckt in der Drehmatrix, mit der vom alten System ins neue gedreht wird.

Für die Fragestellung dieser Arbeit ist es von besonderem Interesse, zu sehen, ob die führenden Hauptkomponenten der Variation der Temperatur und des Niederschlags als Information in der Zeitreihe der Jahrringbreiten wiedergefunden werden. Nur wenn das der Fall ist, können Hauptmuster des Jahresgangs der klimatischen Größen rekonstruiert werden. Andererseits sieht man dadurch auch, welche Variationsmuster der klimatischen Größen nicht in der Zeitreihe der Jahrringbreiten zu finden sind.

### Transformationsstrategie

Ausgangspunkt ist die Matrix  $M(J, N)$ , die aus den  $N$  Zeitreihen der Länge  $J$  besteht:

$$M(J, N) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,N} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{J,1} & m_{J,2} & \cdots & m_{J,N} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Zunächst wird von jeder Reihe der Mittelwert dieser Reihe abgezogen. Damit sind die Spaltensummen und v.a. die Gesamtsumme gleich null und man hat den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt der Punktwolke gesetzt. Im folgenden werden also nur noch die Abweichungen vom Mittel untersucht. Die wesentliche Information darüber, wie das System zu drehen ist, steckt in der Kovarianzmatrix. Die Drehung soll so stattfinden, daß zwischen den gedrehten Koordinaten keine Kovarianz mehr besteht. Das bedeutet, daß die entstehenden Reihen linear unabhängig werden. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung der effektivsten Darstellung. Jede neue Koordinate enthält nur linear unabhängige neue Information. Die Forderung, daß zwischen den neuen Koordinaten keine Korrelation mehr bestehen soll, läßt sich dadurch erreichen, daß die Kovarianzmatrix diagonalisiert wird. Die zur diagonalisierten Kovarianzmatrix gehörenden Eigenvektoren sind eine Linearkombination der alten Basisvektoren, und drücken damit den Zusammenhang zwischen den alten und den neuen Zeitreihen aus. Die Eigenwerte der Kovarianzmatrix (die Diagonalen der diagonalisierten Kovarianzmatrix) geben die Varianz in dieser (neuen) Koordinatenrichtung an.

Konkret müssen zunächst also die Eigenwerte  $\lambda$  der Kovarianzmatrix  $\Sigma$  gefunden werden. Dies geschieht durch Lösen der folgenden Gleichung:

$$\det(\Sigma - \lambda E) = 0. \quad (4.32)$$

Dabei stellt  $E$  die Einheitsmatrix dar. Da  $\Sigma$  eine  $N \times N$  Matrix ist, existieren  $N$  Eigenwerte. Da  $\Sigma$  außerdem noch reell und symmetrisch ist, sind die Eigenwerte alle reell und positiv semidefinit. Zusätzlich folgt daraus schon, daß die Matrix der Eigenvektoren orthogonal ist. Hat man die Eigenwerte nach Glg. (4.32) bestimmt, so kann man mit

$$(\Sigma - \lambda_i E) \cdot \vec{e}_i = 0 \quad (4.33)$$



den  $i$ -ten Eigenvektor  $\vec{e}_i$  bestimmen. Die  $n$ -te Komponente des  $i$ -ten Eigenvektors ist dann das Gewicht, mit dem die  $n$ -te Originalzeitreihe in die  $i$ -te Zeitreihe des gedrehten Systems eingeht. Die Eigenvektoren werden auch empirische Orthogonalfunktionen (EOF) genannt. Die Zeitreihen dieser Hauptkomponenten heißen Hauptkomponentenzeitreihen oder Principal Components Timeseries (PC-Zeitreihen).

### Ergebnisse der Hauptkomponentenanalyse

Als eine erste Anwendung der Hauptkomponentenanalyse werden die Temperatur- und Niederschlagszeitreihen der sechs Monate der Wachstumsperiode (April-September) hauptachsentransformiert. Die sich daraus ergebenden EOF sind in den Abbildungen 4.6 und 4.7 dargestellt. Nun kann man in einem nächsten Schritt die Hauptkomponenten der beiden Klimaelemente gemeinsam berechnen. Für die Wachstumsperiode bekommt man dann 12 gemeinsame Hauptkomponenten für Niederschlag und Temperatur. In Abbildung 4.8 sind diese 12 EOF in Abhängigkeit von den EOF der reinen Temperatur- bzw. Niederschlagsvariationen dargestellt. Abbildung 4.9 zeigt für alle drei EOF-Zerlegungen das sogenannte Eigenwertspektrum, das angibt, wie sich die Varianz auf die einzelnen Hauptkomponenten verteilt. Man sieht, daß sowohl bei der Temperatur, als auch beim Niederschlag die erste EOF etwa 30 %, die ersten beiden EOF zusammen etwa 50 % der Varianz erklären. Die letzte EOF erklärt jeweils zwischen 6 % und 7% der Varianz, was nicht ohne weiteres vernachlässigbar erscheint. Die Eigenwerte der gemeinsamen Hauptkomponenten nehmen noch deutlich weniger steil ab, wie das bei den einzelnen Klimaelementen der Fall ist. Von den 12 Eigenwerten ist der erste schon unter 13%; der letzte bei 4 %.

Im nächsten Schritt stellt sich nun die Frage, welche der Hauptkomponenten einen Zusammenhang mit der Zeitreihe der Jahrringbreiten zeigen. Dazu sind in den Abbildungen 4.10 und 4.11 die Zusammenhänge zwischen den PC-Zeitreihen der Temperatur und des Niederschlags einerseits (jeweils auf der Grundlage aller 12 Kalendermonate berechnet) und der Zeitreihe der Jahrringbreiten andererseits dargestellt. Dazu werden wieder die in Abschnitt 4.3.1 eingeführten Verfahren verwendet. Abb. 4.10 zeigt keinen signifikanten Zusammenhang zu irgendeiner Temperaturvariation des Vorjahres. Die erste EOF der Temperatur des Jahres des Baumrings wird ein hoch signifikanter nicht-linearer und nicht-monotoner Zusammenhang selektiert, der in einem Scatterdiagramm genauer untersucht werden sollte. Zur zweiten EOF der Temperatur besteht ein linearer und zur dritten wieder ein nicht-linearer und nicht-monotoner Zusammenhang. Auch für die zehnte, elfte und zwölfte EOF und einige EOF des Folgejahres findet man signifikante Zusammenhänge.

Beim Niederschlag findet man zahlreiche lineare sowie nicht-lineare und nicht-monotone Zusammenhänge, die ein recht uneinheitliches Bild ergeben.

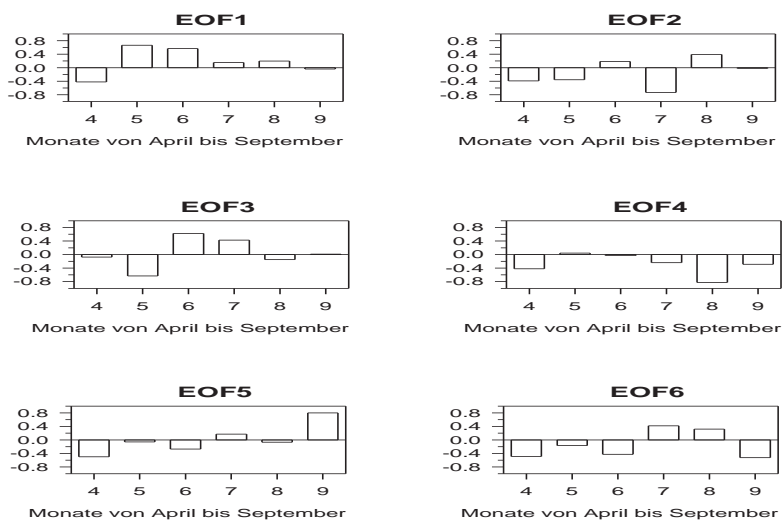


Abbildung 4.6: Empirische Orthogonalfunktionen der Sommermonatstemperaturen (April-September) von Potsdam für die Zeit von 1891 bis 1991.

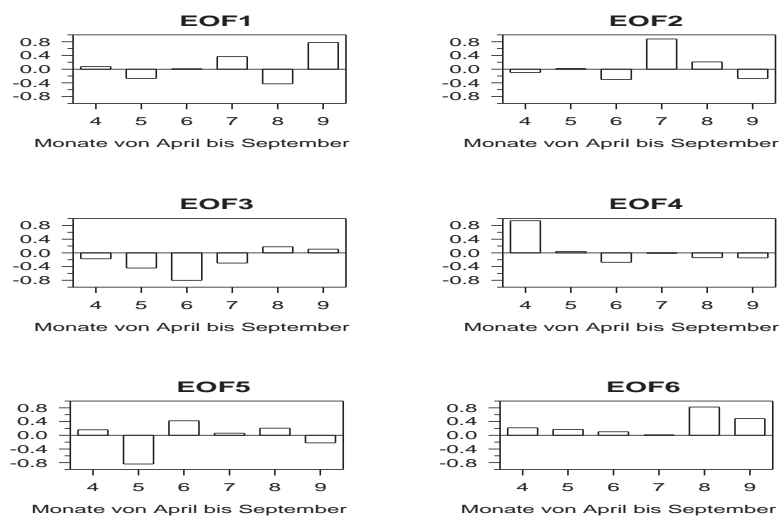


Abbildung 4.7: Empirische Orthogonalfunktionen der Sommermonatsniederschläge (April-September) von Potsdam für die Zeit von 1891 bis 1991.

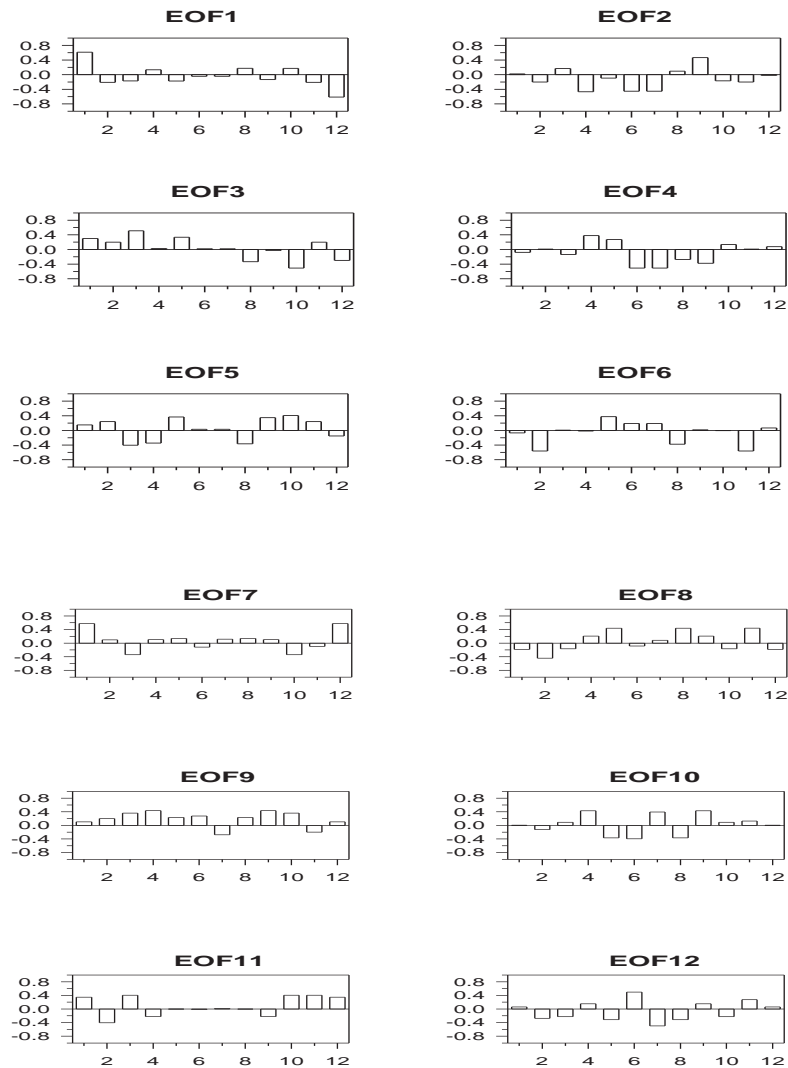


Abbildung 4.8: Empirische Orthogonalfunktionen der Sommermonatstemperaturen und -niederschläge (April-September) von Potsdam für die Zeit von 1891 bis 1991 4.8.

### 4.3.4 Sukzessive und multiple Analysen

Bei allen bis jetzt vorgestellten Strategien wurden Paare von Zeitreihen, bestehend aus einer Einfluß- und einer Zielzeitreihe, untersucht. Bei den Verfahren dieses Abschnitts wird diese Einschränkung aufgehoben. Dazu stehen zwei Wege zur Verfügung. Einerseits kann man fragen, welcher Anteil des nicht durch die erste Einflußgröße erklärten Rests der Zielgröße durch eine zweite Einflußgröße erklärt werden kann. Es kann dann versucht werden, den dadurch nicht erklärten Anteil einer dritten Einflußgröße zuzuordnen. Diese Strategie kann man sukzessive weiter verfolgen, bis keine signifikanten Zuordnungen mehr gefunden werden. Der Nachteil dieser Strategie liegt darin, daß jede Einflußgröße nur einzeln in die Analysen eingeht, d.h. insbesondere nicht mit den anderen wechselwirkt. Diese Einschränkung wird durch multiple Ansätze überwunden, bei denen Kombinationen von Einflußgrößen simultan in die Analysen eingehen.

Grundsätzlich gibt es bei der Berücksichtigung mehrerer Einflußgrößen, aber nur einer Zielgröße das Problem, daß ein gefundener Zusammenhang nicht eindeutig invertiert werden kann, wenn nicht ein Zusammenhang zwischen den Einflußgrößen selbst gefunden wird. Eine eindeutige Inversion des Zusammenhangs ist nur möglich, wenn die Anzahl der insgesamt gefundenen Zusammenhänge und der Einflußgrößen gleich groß ist. Diese Bedingung ist notwendig, aber noch nicht hinreichend, denn bei nichtlinearen Zusammenhängen kann die Inversion mehrere Lösungen haben. Benutzt man nun Monatsdaten für die sukzessiven Analysen, so kann eine Inversion nur dann erfolgreich durchgeführt werden, wenn zwischen den selektierten Monatsdaten einfache und signifikante Zusammenhänge gefunden werden. Dies ist i.A. nicht der Fall, so daß weitere Zielgrößen in Betracht gezogen werden müssen. Betrachtet man hingegen die Hauptkomponenten der Variation der klimatischen Parameter als Einflußgrößen, so findet sich einerseits eine eindeutige Abbildung der einzelnen Monatswerte auf die Hauptkomponenten und andererseits eine eindeutige Abbildung der als signifikant erkannten Hauptkomponenten auf die Zielgröße. Daraus läßt sich für lineare Zusammenhänge der Zielgröße von den Hauptkomponenten der klimatischen Variation immer eine eindeutige Inversion bilden.

#### Sukzessive Analysen

Um diese Herangehensweise zu testen werden neun Experimente gemacht. Dabei wird jeweils eine Liste von möglichen Einflußgrößen einem vorgegebenen Zusammenhang (Funktion) zur Verfügung gestellt. Es wird diejenige Einflußgröße selektiert, die bei dem vorgegebenen Zusammenhang die meiste Varianz erklärt. Dieser erklärte Anteil wird abgezogen und das Verfahren sukzessive wiederholt, bis durch weitere Einflußgrößen kein signifikant höherer Anteil der Varianz mehr erklärt werden kann. Dadurch erhält man für den vorgegebenen Zusammenhang und jede vorgegebene Menge von Einflußfaktoren

- den Einflußfaktor, der die meiste Varianz erklären kann,
- den Anteil der Varianz den dieser stärkste Einflußfaktor erklärt,

- die Gesamtzahl der signifikant beitragenden Einflußgrößen, die unterschiedliche (orthogonale) Anteile der Zielgröße erklären,
- die dadurch insgesamt erklärbare Varianz der Zielgröße.

Zunächst wird als Zusammenhang zwischen den Einflußgrößen und der Zielgröße nur eine lineare Regression verwendet, d.h. der Modellwert für die Zielgröße ist gegeben durch  $\hat{Y} = a + bX$  mit der Einflußgröße  $X$ . Dieser Ansatz ist sehr vielseitig verwendbar, wenn man als Einflußgrößen nicht nur die Beobachtungsgrößen selbst, sondern auch einfache Funktionen dieser zuläßt. Damit können auch in die sukzessive Analyse quadratische Terme ( $X^2$ ) und Mischterme ( $X_1 \cdot X_2$ ) einbezogen werden. Die Ergebnisse der neun durchgeführten Analysen sind in Tabelle 4.2 dargestellt.

Tabelle 4.2: Tabelle der Ergebnisse verschiedener Sukzessiver Strategien der Suche nach einfachen Zusammenhängen zwischen klimatischen Einflußgrößen und dem Baumringwachstum von Kiefern in Brandenburg.  $\mu$  = Verhältnis von selektierten zu möglichen Einflußgrößen.

Nr.	Mögliche Einflüsse	Selektierte Einflüsse	$\mu$	erklärte Varianz in %	
				1. Term	gesamt
1	Alle $T_i$	8, 6, 10, 2, 9, 12	$\frac{6}{12}$	9.5	35.3
2	Alle $N_i$	7	$\frac{1}{12}$	17.2	
3	Sommer $T_i, N_i$	$N_7, T_6, T_8, T_7$	$\frac{4}{12}$	17.2	31.2
4	Sommer $T_i, N_i, T_i^2, N_i^2$	$N_7, T_6, T_4^2, T_8$	$\frac{4}{24}$	17.2	31.6
5	Sommer $T_i, N_i, T_i^2, N_i^2, T_i \cdot N_i$	$N_7, T_6, T_4^2, T_8$	$\frac{4}{30}$	17.2	31.6
6	Sommer $T_i, N_i, T_i^2, N_i^2, T_i \cdot N_j$	$N_7, T_6, T_4^2, T_9, N_6$	$\frac{4}{90}$	17.2	31.7
7	EOF Sommer $T$	6, 2, 1 ( $\approx 57$ % der Varianz)	$\frac{3}{6}$	8	18.4
8	EOF Sommer $N$	1 ( $\approx 30$ % der Varianz)	$\frac{1}{6}$	16.1	
9	EOF Sommer $T, N$	1, 8, 3, 4, 10, 6, 5, 12 ( $\approx 70$ % der Varianz)	$\frac{8}{12}$	8	32

Der Tabelle sind einige wesentliche Informationen zu entnehmen. Zunächst sieht man signifikante Zusammenhänge zu sechs der zwölf Monatsmitteltemperaturen. Dabei zeigt sich kein signifikanter Zusammenhang zu den Wintermonaten Januar und März, jedoch zu

den Herbstmonaten Oktober und Dezember. Ersteres mag verwundern, da die Suche nach speziellen Zusammenhängen (Abschnitt 4.3.2) gezeigt hat, daß extreme Vorwinter einen Einfluß haben (der bei dieser Vorgehensweise demnach nicht gefunden wird). Weiterhin ist zu vermuten, daß der gefundene Zusammenhang zu Mitteltemperaturen von Monaten nach der Wachstumsphase statistische Artefakte sind. Es erscheint deshalb sinnvoll als Einflußgrößen nur Monatswerte vor und während der Wachstumsphase zuzulassen. Das zweite Experiment zeigt, daß bei sukzessiver Betrachtung nur der Juliniederschlag in den Jahrringbreiten gefunden wird, was im Zusammenhang mit den Analysen aus Abschnitt 4.3.1 bedeutet, daß auch der nicht durch den Juliniederschlag erklärte Teil, nicht durch andere monatliche Niederschlagssummen erklärt werden kann. Das dritte Experiment selektiert vier von zwölf klimatischen Sommermonateswerten und erklärt damit über 30 % der Varianz. Dieses wie auch die folgenden Experimente sind ausschließlich mit den Einflußgrößen während der Wachstumsperiode (April bis September) durchgeführt. Trotz des hohen Aufwands sollten alle diese Experimente zusätzlich auch mit den Monatswerten vor der Wachstumsperiode durchgeführt werden. Experiment Nr. 4 zeigt, daß die Möglichkeit nichtlineare Zusammenhänge zu selektieren nur eine geringe Verbesserung ergibt. Im fünften Experiment wurden Wechselwirkungen zwischen Temperatur und Niederschlag des gleichen Monats zugelassen, aber nicht selektiert. Erst das Produkt aus mittlerer Juni-temperatur und Septemberniederschlag bringt eine signifikante aber geringe Verbesserung. Bemerkenswert ist, daß bei diesem sechsten Experiment von den möglichen 90 Einflußgrößen nur vier selektiert wurden. Bei den letzten drei Experimenten wurde nach sukzessiven Zusammenhängen zwischen den EOF der klimatischen Monatsmittelwerte während der Wachstumsperiode und den Jahrringbreiten gesucht. Die Nummern der selektierten EOF gibt dabei an, ob ein Hauptanteil der klimatischen Variation (niedrige Nummern) signifikant in den Jahrringbreiten gefunden wird. Man sieht, daß man mit 57 % der sommerlichen Temperaturvariationen 18 % der Jahrringbreiten auf diese Weise erklären kann. Betrachtet man nur den Zusammenhang zum Sommerniederschlag, so findet man immerhin dessen erste Hauptkomponente in den Jahrringen wieder (aber auch nur diese). Das letzte Experiment zeigt, daß 70 % der sommerlichen Variationen der klimatischen Parameter 32 % der Variationen der Jahrringbreiten erklären. Entsprechend Abbildung 4.1 würde eine darauf basierende Rekonstruktion einen statistischen Fehler machen, der 50 % größer ist als die Standardabweichung der Rekonstruktion. Daraus ist zu schließen, daß keines der Experimente zu Ergebnissen führt, die eine Rekonstruktion erlauben. Andererseits sind in dieser Anwendung der Einfluß des Alterstrends in den Jahrringbreiten und der Einfluß der klimatischen Parameter vor der Wachstumsphase auf die Jahrringbreiten vernachlässigt. So macht es Mut, daß ein so großer Anteil der Variation der klimatischen Parameter in der Jahrringbreite gefunden wird.

## Multiple Analysen

Bei den multiplen Analysen werden mehrere Einflußfaktoren simultan betrachtet. Der Einfachheit halber werden in den hier untersuchten Beispielen nur jeweils zwei Einflußfaktoren

( $X_1$  und  $X_2$ ) berücksichtigt. Dabei können  $X_1$  und  $X_2$  jeweils die Zeitreihen der Sommermonatstemperaturen ( $T_4, \dots, T_9$ ) und der monatlichen Sommerniederschläge ( $N_4, \dots, N_9$ ), aber auch Quadrate dieser Reihen sein. Gesucht wird nun nach optimalen Anpassungen von zweidimensionalen Funktionen  $\hat{B}(X_1, X_2)$  an die beobachtete Reihe der Jahrringbreiten  $B$ .

Es wurden drei Experimente mit verschiedenen vorgegebenen funktionalen Zusammenhängen durchgeführt. Für jeden vorgegebenen Zusammenhang gibt es bei zwei erlaubten Einflußfaktoren aus der Menge der zur Verfügung stehenden klimatischen Zeitreihen eine bestimmte Anzahl an möglichen Kombinationen. Davon ist wiederum nur ein gewisser Anteil signifikant. Die signifikanteste Kombination wird selektiert und deren erklärte Varianz berechnet. Für die drei durchgeführten Experimente ergeben sich dann folgende Ergebnisse:

1. Funktionaler Zusammenhang:  $\hat{B} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$   
das erlaubt 66 Kombinationen, von denen 35 signifikant sind.  
Signifikanteste Kombination:  $T_6, N_7$   
Erklärte Varianz:  $\sigma^2 = 25.7\%$
2. Funktionaler Zusammenhang:  $\hat{B} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_1^2$   
das erlaubt 12 Möglichkeiten, von denen 5 signifikant sind.  
Signifikanteste Möglichkeit:  $N_7$   
Erklärte Varianz:  $\sigma^2 = 17.2\%$
3. Funktionaler Zusammenhang:  $\hat{B} = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_1^2 + a_3 X_2 + a_4 X_2^2 + a_5 X_1 X_2$   
das erlaubt 78 Kombinationen, von denen 64 signifikant sind.  
Signifikanteste Kombination:  $T_6, N_7$   
Erklärte Varianz:  $\sigma^2 = 29.99\%$

In Abb 4.12 ist die erklärte Varianz in Abhängigkeit von den zwei verwendeten Einflußgrößen dargestellt. Man sieht deutlich, daß die signifikanteste Kombination deutlich signifikanter ist als alle anderen Kombinationen.

Das dritte Experiment stellt die Jahrringbreite als vollständige quadratische Form von zwei Monatsmitteln klimatischer Einflußgrößen dar. Dieser Ansatz repräsentiert eine Arbeitspunkthypothese, die besagt, daß es eine bestimmte mittlere Niederschlagsmenge und eine bestimmte mittlere Temperatur gibt, bei der das Wachstum optimal ist. Für alle anderen Kombinationen ist (unter dieser Hypothese) das Wachstum schlechter. Diese Hypothese ist durch einen Paraboloiden charakterisiert, der durch den Ansatz im dritten Experiment erfaßt werden kann. Stellt man diesem Ansatz einen aus sigmoiden Funktionen bestehenden Ansatz gegenüber, so kann man testen, ob eine alternative Hypothese (die der Sättigung) sinnvoller ist. Bei der Sättigungshypothese geht man davon aus, daß das Baumwachstum in einem bestimmten Intervall der klimatischen Einflußgrößen sensibel gegenüber diesen ist, falls die klimatologischen Einflußgrößen aber eine obere Schwelle überschreiten (bzw. eine unter Schwelle unterschreiten), keine Abhängigkeit von diesen mehr besteht.

Untersuchungen zum Vergleich solcher verschiedener Hypothesen konnten im zeitlichen Rahmen dieser Arbeit nicht mehr durchgeführt werden, sind aber von besonderem Interesse. Zusätzlich können auch bei der multiplen Betrachtung die Hauptkomponenten statt der Monatswerte als Einflußgrößen verwendet werden.

In einem weiteren strategischen Entwicklungsschritt könnte man die multiple und die sukzessive Herangehensweise koppeln, indem man sukzessive die Dimension der multiplen Ansätze erhöht und dabei nach signifikant besseren Zusammenhängen sucht. Auch dieser vielversprechenden Strategie konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr nachgegangen werden.



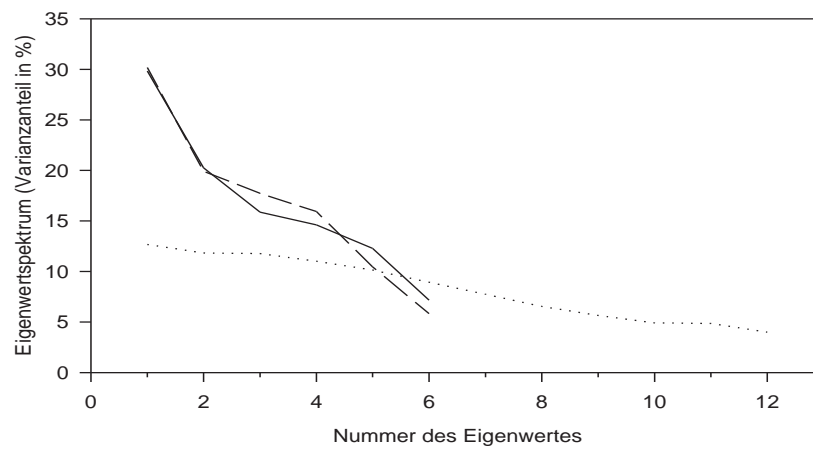


Abbildung 4.9: Eigenwertspektren der EOF von Sommertemperaturen (durchgezogene Linie), Sommerniederschlägen (unterbrochene Linie) und der Kombination aus beidem (gepunktete Linie).

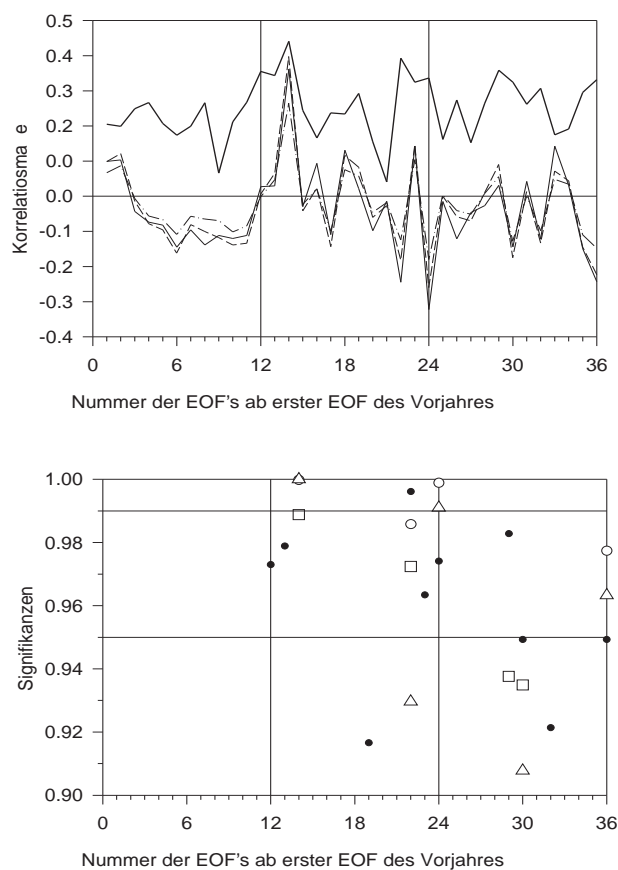


Abbildung 4.10: Oben: Verschiedene Maße des Zusammenhangs zwischen der Zeitreihe der Jahrringbreiten von Kiefern in Brandenburg und den EOF der monatlichen Mitteltemperaturen in Potsdam zwischen 1891 und 1991: Transinformation (dicke durchgezogene Linie), Pearson-Korrelation (dünne durchgezogene Linie), Spearman-Korrelation (dünne unterbrochene Linie) und Kendall-Korrelation (Strichpunktlinie). Unten: Verschiedene Signifikanzmaße: Quadrate =  $\chi^2$ ,  $\Delta$  = Signifikanz der Spearman-Korrelation,  $\circ$  = Signifikanz der Pearson-Korrelation und  $\bullet$  = Signifikanz der Transinformation.

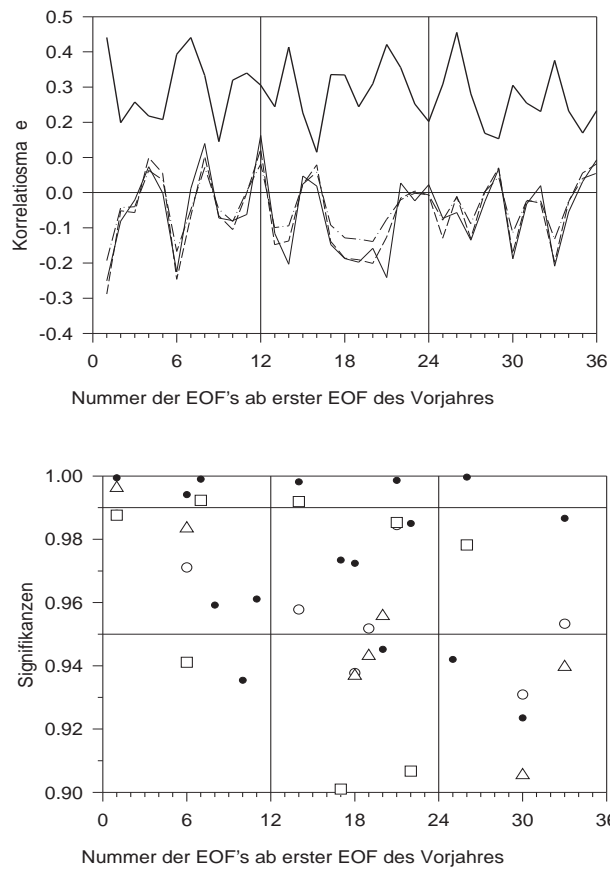


Abbildung 4.11: Oben: Verschiedene Maße des Zusammenhangs zwischen der Zeitreihe der Jahrringbreiten von Kiefern in Brandenburg und den EOF der monatlichen Niederschlagssummen in Potsdam zwischen 1891 und 1991: Transinformation (dicke durchgezogene Linie), Pearson-Korrelation (dünne durchgezogene Linie), Spearman-Korrelation (dünne unterbrochene Linie) und Kendall-Korrelation (Strichpunktlinie). Unten: Verschiedene Signifikanzmaße: Quadrate =  $\chi^2$ ,  $\Delta$  = Signifikanz der Spearman-Korrelation,  $\circ$  = Signifikanz der Pearson-Korrelation und  $\bullet$  = Signifikanz der Transinformation.

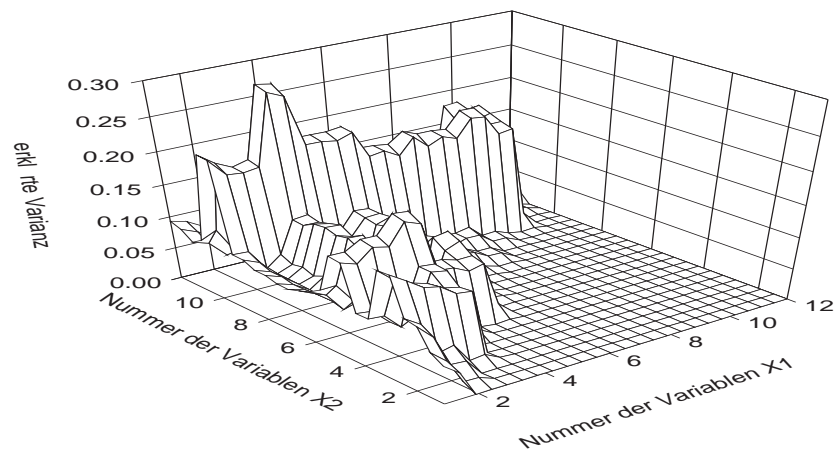


Abbildung 4.12: Erklärte Varianzen multipler vollständiger quadratischer Regressionen zwischen den klimatischen Parametern für die Sommermonate in Potsdam (1 bis 6 = Monatstemperaturen von April bis September, 7 bis 12 = monatliche Niederschlagssummen von April bis September) und der Jahrringbreite von Kiefern in der Region Brandenburg von 1891 bis 1991.

# Literaturverzeichnis

- [1] W. Birrong. *Statistische Analyse des Zusammenhangs ausgewählter klimatologischer und botanischer Informationen im Zeit- und Frequenzbereich*. Eigenverlag des Instituts für Meteorologie und Geophysik der Universität Frankfurt/Main, Frankfurt am Main, 1988.
- [2] K. Bosch. *Elementare Einführung in die angewandte Statistik*. Vieweg, Bern, Braunschweig, 1987.
- [3] K. Bosch. *Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Vieweg, Bern, Braunschweig, 1987.
- [4] G.E.P. Box and G.M. Jenkins. *Time series analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco, 1976.
- [5] K.R. Briffa, T.S. Bartholin, D. Eckstein, P.D. Jones, W. Karlen, F.H. Schweingruber, and P. Zetterberg. A 1,400-year tree-ring record of summer temperatures in fennoscandia. *Nature*, 6285:434–439, 1990.
- [6] B. Frenzel, editor. *Dendrochronologie und postglaziale Klimaschwankungen in Europa*. Franz Steiner Verlag, Wiesbaden, 1977.
- [7] H.C. Fritts. *Tree Rings and Climate*. Academic Press, London, New York, 1976.
- [8] H. Haken. *Synergetik*. Springer, Berlin, 1990.
- [9] Heussner, 1997. persönliche Mitteilung.
- [10] M.K. Hughes, P.M. Kelly, J.R. Pilcher, and V.C. JR Lamarche, editors. *Climate from Tree Rings*. Cambridge University Press, London, New York, 1982.
- [11] R. Minnert. Statistische Analyse des Zusammenhangs von skandinavischen Baumringparameter- mit Temperaturzeitreihen und Temperaturrekonstruktionen bis ins 17. Jahrhundert. Diplomarbeit, 1996. Institut für Meteorologie und Geophysik, Universität Frankfurt.
- [12] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

- [13] R. Schlittgen and B.H.J. Streitberg. *Zeitreihenanalyse*. R. Ouldenbourg Verlag, München, 5. edition, 1994.
- [14] C.-D. Schönwiese. *Praktische Statistik*. Gebrüder Bornträger, Berlin, Stuttgart, 1985.
- [15] F.H. Schweingruber. *Der Jahrring*. Paul Haupt, Bern, Stuttgart, 1983.
- [16] F.H. Schweingruber, 1997. persönliche Mitteilung.
- [17] R. Stull. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 89.
- [18] H. Weingärtner. Korrelation und Information. *Meteorol. Rundschau*, 38:1–8, 1985.

# Anhang A

## Was bedeutet stochastische Unabhängigkeit?

Man kann sich leicht vorstellen, daß man von  $n$  Menschen sowohl ihre Körpergröße  $X$ , als auch ihr Gewicht  $Y$  mißt. Weiterhin kann man sich leicht vorstellen, daß diese beiden Größen nicht unabhängig voneinander sind. Die Abhängigkeit gilt aber nur im Mittel, denn man kann zwar erwarten, daß eine große Person schwerer ist als eine kleine, aber das Umgekehrte ist im Einzelfall immer möglich. In diesem Beispiel, wo man den Zusammenhang sofort einsieht, braucht man natürlich nicht mehr zu testen, ob die Daten einen Zusammenhang suggerieren, sondern kann gleich nach dessen Stärke und nach optimalen Approximationen dieses Zusammenhangs fragen. Anders sieht die Situation aus wenn man als Wissenschaftler Neuland betritt, d.h. nach Zusammenhängen sucht, und nicht von vornherein weiß, ob zumindest stochastisch ein Zusammenhang besteht. Zunächst müssen wir klar sehen, was mit stochastischem Zusammenhang gemeint ist. Die wichtigste Einschränkung, die hier gemacht wird, ist, daß die Realisationen von  $X$  und  $Y$  nur paarweise untersucht werden, d.h. daß jeder Realisation von  $X$  genau ein  $Y$  zugeordnet wird und umgekehrt. Bei dem oben gegebenen Beispiel ist das klar: einer Messung ist eine Realisierung von einer Körpergröße und einem Gewicht zugeordnet. Ganz anders ist es aber z.B. bei einer Zeitreihe, die die Realisation des folgenden Prozesses ist:

$$\begin{aligned}x_t &= f(x_{t-i}, y_{t-i}) \\y_t &= g(x_{t-i}, y_{t-i}).\end{aligned}$$

Bei diesem Prozess gibt es einen deterministischen Zusammenhang zwischen  $x_t$ ,  $x_{t-i}$  und  $y_{t-i}$  und einen zwischen  $y_t$  und  $x_{t-i}$  und  $y_{t-i}$ . Damit hängen sowohl  $x_t$  als auch  $y_t$  von der gemeinsamen Vergangenheit ab. Sie hängen damit also von den vorhergehenden Werten der Zeitreihen selbst ab. Demnach ist die Information über den Zusammenhang **vollständig** in den Zeitreihen vorhanden. Bei der Analyse von Paaren der Art  $x_t$  und  $y_t$  muß er aber nicht sichtbar werden. Da der Prozess rekursiv ist, liegt ein Teil der Information über die Realisation von  $X$  zur Zeit  $t$  möglicherweise (das hängt von der konkreten Gestalt von  $f$  und  $g$  ab) in der Realisation von  $X$  und/oder  $Y$  zu viel früheren Zeiten. Die Dynamik könnte

konkret so aussehen, daß man in einer endlichen Realisation (Zeitreihe) keine signifikante stochastische Abhängigkeit zu irgendeinem der vorherigen Werte der beiden Variablen finden kann. Man muß dann die Variablen stochastisch unabhängig nennen. Das zeigt, daß stochastische Unabhängigkeit nicht ausschließt, daß die beobachteten Größen sogar völlig deterministisch voneinander abhängen. Nach dieser Warnung nun zur konkreten Definition von stochastischer Unabhängigkeit:

Wir betrachten  $X$  und  $Y$  als Zufallsvariable, da es für uns zunächst zufällig erscheint ob große oder kleine Werte realisiert werden. Die Frage ist nun, ob die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für die Variable  $X$  der Zahlenwert  $x$  realisiert wird, davon abhängt, daß für das zugeordnete  $Y$  der Wert  $y$  realisiert wird. Diese bedingte Wahrscheinlichkeit [3] nennen wir  $p(X = x|Y = y)$  oder kürzer  $p(x|y)$ . Falls die Realisation von  $X$  nicht von der Realisation von  $Y$  abhängt, muß gelten:

$$p(X = x|Y = y) = p(X = x) = p(x) \quad (\text{A.1})$$

und umgekehrt auch

$$p(Y = y|X = x) = p(Y = y) = p(y). \quad (\text{A.2})$$

Dabei stellen die Terme ganz rechts wieder nur verkürzte Schreibweisen dar. Die nächste wichtige Größe ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Verbundereignis  $X = x$  und  $Y = y$  eintritt. Diese Verbundwahrscheinlichkeit nennen wir  $p(X = x, Y = y)$ , oder kurz  $p(x, y)$ . Man kann sich nun durch kurzes Überlegen klar machen, daß bei stochastischer Unabhängigkeit, d.h. wenn die Gleichungen (A.1) und (A.2) gelten, die Verbundwahrscheinlichkeit  $p(x, y)$  gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten  $p(x)$  und  $p(y)$  sein muß. Kennt man also die Verbundwahrscheinlichkeit und die Einzelwahrscheinlichkeiten, so kann man die stochastische Unabhängigkeit sofort erkennen. Nun ist es aber so, daß man diese im allgemeinen nicht kennt, sondern schätzen muß. Selbst wenn man sie wüßte, gäbe es noch das Problem, daß eine endliche Realisierung immer auch durch Zufall mal ein sehr seltenes Ereignis sein kann. Der im nächsten Abschnitt vorgestellte Test, berechnet nun gerade, wie unwahrscheinlich das geschätzte  $p(x, y)$  unter der Annahme  $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$  ist.

$X$  und  $Y$  können dabei sehr verschiedene Arten von Zufallsvariablen sein. Zum Beispiel können die Variablen nominal skaliert sein, wie es bei  $X = \text{Farbe des Apfels}$  und  $Y = \text{Geschmack des Apfels}$  der Fall wäre. Sie müssen nur in disjunkte Klassen eingeteilt sein, d.h. ein Apfel kann nicht gleichzeitig grün und rot sein. Die Variablen können auch ordinal skaliert sein, wie es zum Beispiel die Wettereinteilung in *sehr schlecht* über *mittel* bis *sehr gut* ist. In diesem Fall ist eine Klasseneinteilung vorgegeben. Hat man metrische Variablen, z.B. Körpergröße in *cm* oder Temperaturen in  $^{\circ}\text{C}$ , so muß man diese selbst in Ereignisklassen einteilen und daraus die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses einer bestimmten Klasse schätzen.

Zum Schluß dieses Abschnittes soll nicht unerwähnt bleiben, daß man das Konzept der stochastischen Abhängigkeit bei Zeitreihen auch selbstbezüglich und über Kreuz anwenden kann. Man erhält dann stochastische Auto-Abhängigkeit bzw. stochastische Kreuzabhängigkeit.



# Anhang B

## Spezielle statistische Methoden

Im Folgenden sind einige statistische Maße genannt und erklärt, die in der Dendrochronologie Verwendung finden, aber nicht zu den allgemeinen statistischen Methoden gehören.

### B.1 Sensitivität

Betrachtet man zunächst die gewöhnliche Standardabweichung, so stellt man fest, daß sie nichts darüber aussagt, welche Strukturen die Varianz der Zeitreihe hat. Aus der gewöhnlichen Statistik kennt man den Variationskoeffizienten  $v$ , der als das Verhältnis der Standardabweichung  $s$  zum Mittelwert  $\bar{x}$  definiert ist. Er ist also ein Maß für die Stärke der Schwankungen im Verhältnis zum Mittelwert. Dies ist allerdings ein Maß für die gesamte Reihe und somit ein globales Maß. In der Dendrochronologie wird sehr ähnlich dazu ein lokales Maß der relativen Variabilität definiert, das jährliche Sensitivität  $S_{i+1}$  des Jahres  $i + 1$  heißt. Somit kann jeder Zeitreihe eine Reihe der jährlichen Sensitivität zugeordnet werden. Sie ist definiert, als die Differenz zwischen dem Wert des  $i + 1$ -ten Jahres zu dem des Vorjahres geteilt durch den Mittelwert der beiden Jahre. Daraus ergibt sich für die jährliche Sensitivität:

$$S_{i+1} = 2 \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} + x_i} \quad (\text{B.1})$$

Weiter kann man daraus zu einem globalen Maß der Zeitreihe gelangen, indem man das arithmetische Mittel der Reihe  $S_i$  betrachtet. Dies führt zur sogenannten mittleren Sensitivität:

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=2}^n |S_i|}{n - 1} \quad (\text{B.2})$$

wobei  $n$  die Länge der Originalreihe (nicht der um 1 kürzeren Reihe der jährlichen Sensitivität) ist.

Was unterscheidet nun die mittlere Sensitivität vom Variationskoeffizienten? Zunächst sind beide ein Maß das Variation im Verhältnis zum Mittel ausdrückt. Der Unterschied liegt

nur darin, daß die mittlere Sensitivität um so größer wird, je stärker die Gesamtvariabilität durch die Jahr-zu-Jahr-Variabilität bestimmt ist.

Ein Beispiel soll dies verdeutlichen. Nehmen wir eine Zeitreihe  $a$  bestehend aus  $n = 10$  Werten, von denen die ersten fünf den Wert neun haben und die zweiten fünf den Wert elf. Dann ist  $\bar{a} = 10$  und die Standardabweichung

$$s_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2$$

führt zu einem Wert von  $s_a = 1$ .

Nehmen wir nun eine andere Zeitreihe  $b$  mit  $n = 10$  Werten, wobei die Zahlen neun und elf immer alternierend auftreten sollen. Diese Reihe hat den Mittelwert  $\bar{b} = 10$  und die Standardabweichung  $s_b = 1$ . Wie wir also sehen, haben beide Reihen den gleichen Mittelwert und die gleiche Standardabweichung, und demnach auch einen gleichen Variationskoeffizient. Wie sieht es nun mit den Sensitivitäten der Reihen aus? Aus Gleichung B.1 folgt für die Reihen der jährlichen Sensitivität:

$$S_{a,i} = \{0; 0; 0; 0; .4; 0; 0; 0; 0\} \quad (\text{B.3})$$

$$S_{b,i} = \{0.4; -0.4; 0.4; -0.4; 0.4; -0.4; 0.4; -0.4; 0.4; \}. \quad (\text{B.4})$$

Das ergibt folgende mittleren Sensitivitäten:

$$\bar{S}_a = .4 \quad (\text{B.5})$$

$$\bar{S}_b = 3.6 \quad (\text{B.6})$$

Das Beispiel zeigt deutlich, daß die Sensitivität ein Maß für die Jahr-zu-Jahr-Variabilität ist, die ja in der zweiten Reihe (alternierende Werte) besonders hoch, in der ersten hingegen besonders niedrig ist. Wie der Variationskoeffizient ist aber auch die Sensitivität nicht invariant gegenüber Mittelwerttransformationen. Während also die Standardabweichung (und im allgemeinen auch alle anderen grundlegenden statistischen Variationsmaße) nicht vom Mittelwert abhängen, gilt dies für den Variationskoeffizient und die Sensitivität nicht. Hat eine Zeitreihe den Mittelwert null, so ist kein Variationskoeffizient definierbar. Für die jährliche Sensitivität gilt diese Eigenschaft schon lokal, d.h. es darf in der Zeitreihe nirgends  $x_{i+1} + x_i = 0$  auftreten. Hätte man obiges Beispiel mit Reihen der Werte  $-1$  und  $+1$  anstatt  $9$  und  $11$  versucht, so wäre man schnell auf nicht hebbare Singularitäten gestoßen. Daraus folgt, daß man Sensitivitäten keinesfalls für normierte Reihen (d.h. Mittelwert  $\bar{x} = 0$  und Standardabweichung  $s_x = 1$ ) berechnen darf.

Die Berechnung der Sensitivität ist günstig zum Vergleich von Baumringdaten, da diese positiv definit sind. Man kann beim Vergleich verschiedener Datenreihen mit etwa gleichem Mittelwert, oder beim Vergleich von auf gleichen Mittelwert gebrachten Datenreihen die Sensitivität nutzen, da sie dann aussagt, welche Reihe größere Jahr-zu-Jahr-Schwankungen aufweist.

## B.2 Gleichläufigkeit

Die Gleichläufigkeit ist ein Maß zum Vergleich zweier Reihen  $a$  und  $b$ . Es wird der Anteil der gleichgerichteten Jahr-zu-Jahr-Variationen berechnet. Zunächst wird jeder Reihe eine Differenzreihe zugeordnet. Dazu wird die Differenz  $\Delta_{a,i} = a_{i+1} - a_i$  für jeden Wert der Reihe außer dem Letzten gebildet. Die Differenzreihe hat demnach die Länge  $n - 1$ . Von diesen Differenzen werden nur die Vorzeichen weiter bearbeitet, d.h. es wird eine neue Variable  $G_{a,i}$  eingeführt mit

$$G_{a,i} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } \Delta_{a,i} > 0 \\ 0 & \text{falls } \Delta_{a,i} = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{falls } \Delta_{a,i} < 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Eine solche Vorzeichenzählende Reihe kann auch der zweiten Zeitreihe  $b$  zugeordnet werden. Um nun die beiden Reihen zu vergleichen wird die sog. Gleichläufigkeit  $G(a, b)$  wie folgt berechnet:

$$G(a, b) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |G_{a,i} + G_{b,i}| \quad (\text{B.8})$$

Der Ausdruck in der Summe ist eins, falls beide Reihen vom Jahr  $i$  zum Jahr  $i + 1$  in die gleiche Richtung gehen,  $\frac{1}{2}$  falls eine der Reihen konstant bleibt und die andere sich beliebig ändert und 0 falls sich beide Reihen nicht oder entgegengesetzt ändern. Damit gibt  $G(a, b)$  den Anteil der Zeitreihenwerte an, die sich zur gleichen Zeit in die gleiche Richtung ändern. Wenn beide Reihen aus weißem Zufallsrauschen bestehen, so ist für  $G(a, b)$  der Wert .5 zu erwarten. Je näher der Wert an 1 oder 0 kommt, desto mehr Zusammenhang ist in der Jahr-zu-Jahr-Variabilität der beiden Kurven. Werte nahe 0 bedeuten Gegenläufigkeit. Der Vorteil dieser Methode gegenüber der gewöhnlichen Pearson-Korrelation ist der, daß hier die Korrelation nicht so stark von tieffrequenten Eigenschaften der Reihen beeinflusst wird.

Die Gleichläufigkeit kann einfach auf mehr als zwei Zeitreihen verallgemeinert werden, indem in Glg. (B.7) nicht die Werte  $\pm \frac{1}{2}$  sondern  $\pm \frac{1}{m}$  verwendet werden, wenn  $m$  die Anzahl der zu vergleichenden Zeitreihen ist. Gleichung (B.8) wird dann erweitert zu

$$G(a, b, \dots, m) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \sum_{k=1}^m G_{a_k,i} \right| \quad (\text{B.9})$$

## B.3 Intervalltrend

Will man nun die Jahr-zu-Jahr-Variabilität von mehr als zwei Zeitreihen miteinander vergleichen so bietet sich die Methode des Intervalltrends an. Es sollen nun  $m$  Zeitreihen miteinander verglichen werden. Zunächst werden für alle Zeitreihen  $a_j$  mit  $j = 1, \dots, m$  die Differenzenreihen  $\Delta_{j,i} = a_{j,i+1} - a_{j,i}$  gebildet. Daraus folgt dann (ähnlich der Gleichläufig-

keit) der jährliche Intervalltrend  $t_{j,i}$  der Reihe  $a_j$  mit:

$$t_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \Delta_{j,i} > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } \Delta_{j,i} = 0 \\ 0 & \text{falls } \Delta_{j,i} < 0 \end{cases}$$

Damit ist der jährliche Intervalltrend einer Zeitreihe eine positiv semidefinite Zeitreihe der Länge  $n - 1$ . Für jeden negativen Jahr-zu-Jahr-Unterschied in  $a_j$  ist  $t_{j,i}$  null, für jeden verschwindenden Unterschied zum Folgejahr ist  $t_{j,i} = \frac{1}{2}$  und für jeden positiven Unterschied ist  $t_{j,i} = 1$ . Mittelt man nun  $t_{j,i}$  über alle betrachteten Zeitreihen  $m$ , so erhält man den mittleren Intervalltrend  $t_i$  in Abhängigkeit von der Zeit:

$$t_i = \frac{\sum_{j=1}^m t_{j,i}}{m}$$

Damit ist  $t_i$  zwischen null und eins beschränkt. Falls alle Reihen vom Jahr  $i$  zum Jahr  $i + 1$  ansteigen, so ist  $t_i = 1$ . Falls alle Reihen vom Jahr  $i$  zum Jahr  $i + 1$  abfallen, so ist  $t_i = 0$ , andernfalls liegt  $t_i$  irgendwo dazwischen. Falls die Reihen in ihrer Jahr-zu-Jahr-Variabilität keine gemeinsame Information haben, so sollte  $t_i = .5$  sein. Das heißt, daß die Abweichung von  $t_i$  vom Wert  $.5$  ein Maß für die gleichartige (nicht gleichgerichtete) Variation ist. Bevor man dieses Maß berechnet, sollte man die Reihen paarweise auf Gleichläufigkeit testen. Zweifelsfrei sind zwei exakt gegenläufige Reihen nämlich in gutem Zusammenhang ( $G(a,b)=0$ ). Trotzdem gibt der Intervalltrend gerade dann  $t_i = \frac{1}{2}$ , für alle  $i$ . Man muß sich demnach bewußt machen, daß der Intervalltrend nur gleichläufige, nicht aber gegenläufige Variationen erkennen kann.

Falls nun  $t_i$  nahe bei null oder nahe bei eins ist, kann man annehmen, daß zu dieser Zeit alle Reihen dem gleichen Einfluß ausgesetzt waren. Dies kann mit Einschränkungen als Repräsentanztest verwendet werden. Wenn  $t_i$  für fast alle  $i$  nahe bei null oder eins liegt, deutet das darauf hin, daß zwischen fast allen Reihen ein guter Zusammenhang auf der Skala der Jahr-zu-Jahr-Variationen besteht.

Jahre in denen alle Reihen das gleiche Verhalten zeigen, d.h. in denen  $t_i$  exakt null oder eins ist (das wird bei vielen Reihen immer unwahrscheinlicher), nennt man Weiserjahre. Diese Weiserjahre können gut zur Synchronisierung (d.h. zeitliche Übereinstimmung) von verschiedenen Datensätzen verwendet werden. Weiserjahre treten in dendrologischen Daten in semiariden Gebieten häufig, in gemäßigten Gebieten zuweilen und in ozeanischen (humiden) Gebieten selten auf. Dies hängt damit zusammen, daß in ozeanischen Klimaten die Temperaturvariation wesentlich geringer ist als in kontinentalen Klimaten.