Woher kommt die U-Verteilung?

Jürgen Grieser

26.06.1998

1 Die U-Verteilung

In der Literatur findet man zwei Darstellungsformen der U-Verteilung. Einerseits kann die U-Verteilung zwischen $+A$ und $-A$ angegeben werden, dann gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(A^2 - x^2\right)^{-.5} & \text{, falls } -A \leq x \leq A \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Andererseits findet man auch eine zwischen 0 und 1 definierte U-Verteilung, für die dann die Dichte

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(z(1-z)\right)^{-.5} & \text{, falls } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases} \tag{2}$$

angegeben wird. Man kann sich leicht vergewissern, daß sowohl Gleichung (1) als auch Gleichung (2) Wahrscheinlichkeitsdichten beschreiben, da sie nirgends negativ sind und das Integral von $-\infty$ bis $+\infty$ über diese Dichten jeweils 1 ergibt.

Zunächst soll hier gezeigt werden, daß die beiden Dichten sich nur darin unterscheiden, daß sie auf verschiedenen Intervallen definiert sind, d.h. daß sie bis auf einen Normierungsfaktor die gleiche Form haben. Dazu wird das Intervall $[-A, A]$ in das Intervall [0,1] transformiert. Dies geschieht durch die Transformation

$$z(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{A} + 1\right). \tag{3}$$

Nun kann Gleichung (3) in Gleichung (2) eingesetzt werden, woraus folgt

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2\,A}\right)\,\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2\,A}\right)\right]^{-.5} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2\,A}\right)^2\right]^{-.5} \\ &= \frac{2\,A}{\pi}\left[A^2 - x^2\right]^{-.5} \\ &= 2\,A\,f(x) \\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\,f(x). \end{aligned} \tag{4}$$

Der Faktor $2\,A$, um den $g(z)$ gegenüber $f(x)$ verstärkt ist, ist gleich dem Faktor, um den $f(x)$ breiter ist als $g(z)$. Er folgt damit nur daraus, daß das Integral über beide Funktionen 1 sein muß. Die beiden Verteilungen sind also gleich. Doch wo kommen sie her?

2 Verteilung einer harmonisch schwingenden Zeitreihe

Eine harmonisch schwingende Zeitreihe ist gegeben durch

$$x(t) = A \sin(2\,\pi\,t). \tag{5}$$

Um die Verteilung der Variable x zu erhalten (die von $-A$ und A begrenzt ist), muß man berechnen, welchen Anteil der Zeit dt die Variable in einem Intervall dx verbringt. Dazu stellt man Gleichung (5) zunächst nach t um und erhält

$$t(x) = \frac{1}{2\,\pi} \arcsin\left(\frac{x}{A}\right). \tag{6}$$

Die Ableitung davon ist die noch nicht normierte Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\frac{d\,t}{d\,x} = \frac{d}{d\,x}\left[\frac{1}{2\,\pi}\arcsin\left(\frac{x}{A}\right)\right] = \frac{1}{2\,\pi\,A}\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)^{-.5}. \tag{7}$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte folgt dann schließlich

$$f(x) = \frac{\frac{d\,t(x)}{d\,x}}{\int\limits_{-A}^{A} \frac{d\,t(x)}{d\,x}\,d\,x} \tag{8}$$

mit

$$\begin{aligned} \int\limits_{-A}^{A} \frac{d\,t(x)}{d\,x}\,d\,x &= \tfrac{1}{2\,\pi}\int\limits_{-A}^{A} \left(A^2 - x^2\right)^{-.5}\,d\,x \\ &= \tfrac{1}{2\,\pi}\left[\arcsin\left(\tfrac{A}{A}\right) - \arcsin\left(\tfrac{-A}{A}\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{2\,\pi}\left[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right] = \tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Verteilung einer harmonisch schwingenden Zeitreihe mit der Amplitude A gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left(A^2 - x^2\right)^{-.5} \tag{10}$$

was mit Gleichung (1) identisch ist. Eine harmonisc hschwingende Zeitreihe ist also U-verteilt.

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion folgt dann

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\limits_{-A}^{x} f(x')\,dx' \\ &= \tfrac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(\tfrac{x}{A}\right) - \arcsin\left(\tfrac{-A}{A}\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{\pi}\left[\arcsin\left(\tfrac{x}{A}\right) + \tfrac{\pi}{2}\right] \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi}\arcsin\left(\tfrac{x}{A}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

3 Verteilung der Feigenbaumdynamik bei $r = 4$

Die Feigenbaumdynamik ist gegeben durch

$$x_{n+1} = r\,x_n\,(1 - x_n), \text{ mit } x_0 \in [0, 1]. \tag{12}$$

Für den Fall $r = 4$ spricht man von vollentwickeltem Chaos, und genau für diesen Fall soll hier die Verteilung der Variablen X berechnet werden. Man könnte dazu das Intervall $[0, 1]$ partitionieren (z.B. in k gleichgroße Klasssen einteilen) und zählen, wie oft die nach Gleichung (12) Iterierte in jeder Klasse vorbeikommt. Dies würde zumindest zu einer numerischen Näherung der Verteilung führen. Hier soll die Verteilung aber anlaytisch berechnet werden. Dazu wird die Feigenbaumdynamik auf die Zeltdachabbildung $y_{n+1} = 2\,y_n \mod 1$ zurückgeführt, was durch die Transformation

$$x = .5(1 - \cos 2\,\pi\,y) \tag{13}$$

geschieht. Da die Rechnung in mehreren Schritten verläuft, soll sie hier vorgeführt werden:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= r\,x_n\,(1 - x_n) \\ \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2\,\pi\,y_{n+1})) &= 4\,(.5 + .5\,\cos(2\,\pi\,y_n))\,(.5 - .5\,\cos(2\,\pi\,y_n)) \\ &= (1 + \cos(2\,\pi\,y_n))\,(1 - \cos(2\,\pi\,y_n)) = 1 - \cos^2(2\,\pi\,y_n) \\ &= \sin^2(2\,\pi\,y_n) = \tfrac{1}{2}[1 - \cos(4\,\pi\,y_n)] \\ \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2\,\pi\,y_{n+1})) &= \tfrac{1}{2}[1 - \cos(4\,\pi\,y_n)] \\ y_{n+1} &= 2\,y_n \mod 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Nun ist diese Zeltdachabbildung zwischen 0 und 1 gleichverteilt. Betrachtet man andererseits die harmonisch schwingende Zeitreihe, so reicht es aus, genau eine Schwingung zu untersuchen. Dabei läuft die Zeit t gleichmäßig von 0 bis 1. Sie ist also ebenfalls zwischen 0 und 1 gleichverteilt (wenn auch nicht zufällig). Die harmonische Schwingung ist dann proportional zu $\cos(2\,\pi\,t)$ und transformiert damit die gleichverteilte Variable t in die U-verteilte Variable $x(t)$ aus Gleichung (5). Genau das Gleiche geschieht durch Gleichung (13). Sie transformiert die gleichverteilte Variable der Zeltdachabbildung in die U-verteilte Variable der Feigenbaumabbildung bei $r = 4$. Es ist demnach offensichtlich, daß die trigonometrischen Funktionen $\sin(2\,\pi\,x)$ und $\cos(2\,\pi\,x)$ gleichverteilte Variablen in U-vertelte Variablen transformieren.

4 Erzeugung U-verteilter Zufallszahlen

Die Erzeugung von zwischen $-A$ und A U-verteilten Zufallszahlen erfolgt einfach über die in Gleichung (5) gegebene Transformation. In gleicher Weise können mit Hilfe von Gleichung (13) auch zwischen 0 und 1 U-verteilte Zufallszahlen erzeugt werden.